L. W. Kantorowitsch

Juni

Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30										

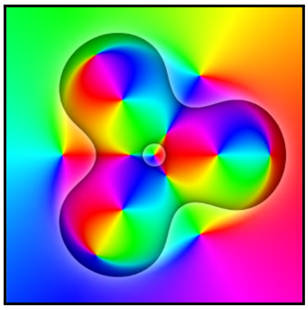
Der Satz von Kantorowitsch (von Olivier Sète und Jan Zur)

Das Newton-Verfahren zur Berechnung von Nullstellen analytischer Funktionen (CB März 2014) kann auf differenzierbare Funktionen in Banachräumen verallgemeinert werden. Unter gewissen Voraussetzungen an die Funktion F und den Startwert v_0 garantiert der Satz von Kantorowitsch auch in diesem Fall die lokale Konvergenz der Newton-Iteration

$$v_{k+1} = N(v_k) = v_k - F'(v_k)^{-1} F(v_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

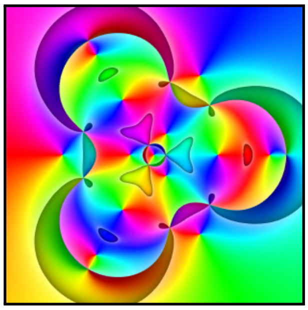
gegen eine Nullstelle von F. Wir wenden diese Verallgemeinerung auf Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ an, die nicht analytisch aber Fréchet-differenzierbar sind. Die Identifikation von $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $z = x + \mathrm{i}y$ liefert die komplexe Formulierung von (1),

$$z_{k+1} = N(z_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \text{mit} \quad N(z) = z - \frac{\overline{\partial_z f(z)} f(z) - \partial_{\bar{z}} f(z) \overline{f(z)}}{J(z)}, \tag{2}$$

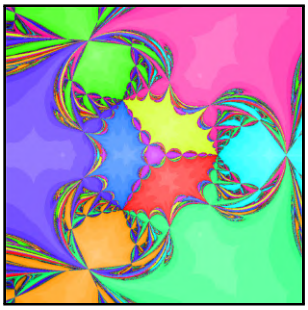


wobei $\partial_z f = \frac{1}{2}(\partial_x f - \mathrm{i}\partial_y f)$ und $\partial_{\bar{z}} f = \frac{1}{2}(\partial_x f + \mathrm{i}\partial_y f)$ die Wirtinger-Ableitungen und $J(z) = |\partial_z f(z)|^2 - |\partial_{\bar{z}} f(z)|^2$ die Jacobi-Determinante von f sind. Die Newton-Abbildung N ist außerhalb der kritischen Menge $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : J(z) = 0\}$ definiert und ihre Fixpunkte sind Nullstellen von f. Zur Illustration betrachten wir die harmonische Funktion

$$f(z) = z - \overline{\left(\frac{z^2}{z^3 - 0.6^3} \right)}.$$



Um Null- und Polstellen nicht-analytischer Funktionen im Phasenporträt zu unterscheiden, färben wir Gebiete heller, wenn eine Funktion dort orientierungserhaltend ist ($J > 0$), oder dunkler, wenn sie orientierungsumkehrend ist ($J < 0$). Ist eine Funktion an einer ihrer Null- oder Polstellen orientierungsumkehrend, wird der Farbkreis entgegengesetzt zur gewohnten Richtung durchlaufen. Das obere Bild zeigt die Funktion f, welche an 4 Nullstellen orientierungserhaltend, und an 6 Null- und 3 Polstellen orientierungsumkehrend ist. Das mittlere Bild zeigt die Funktion $N(z) - z$, deren Nullstellen genau die Nullstellen von f sind. An $\mathcal{C}$ springt die Phase von $N(z) - z$, da J das Vorzeichen, wechselt. Das untere Bild zeigt die Einzugsbereiche der Nullstellen von f. Punkte, für die die Iteration (2) gegen die gleiche Nullstelle von f konvergiert, sind gleich gefärbt.



Auf dem Titelbild ist die Funktion $N^3(z) - z = N(N(N(z))) - z$ für $|\mathrm{Re}\,(z)| \leq 1.5$, $|\mathrm{Im}\,(z)| \leq 1.5$ dargestellt. Auffallend sind die Bereiche, in denen $N^3(z) - z \approx z^* - z$ für eine Nullstelle z^* von f ist. Diese ähneln den Einzugsbereichen der Nullstellen bereits, was die schnelle Konvergenz der Newton-Iteration (2) illustriert: Schon die dritten Iterierten sind nah an z^*.

Leonid Witaljewitsch Kantorowitsch (1912 – 1986)

wurde als Sohn eines Arztes in Sankt Petersburg geboren. Ab 1926 studierte er in Leningrad Mathematik bei Fichtenholz, Smirnow und Delauney. Bereits während des Studiums machte er durch die Lösung einiger offener Probleme von Lusin (CB September 2019) auf sich aufmerksam. Im Jahr 1934 wurde er mit nur 22 Jahren in Leningrad zum Professor berufen. Kantorowitsch forschte vor allem auf dem Gebiet der Funktionalanalysis, insbesondere im Zusammenhang mit der Numerik iterativer Verfahren, wie z.B. dem Newton-Verfahren. Später wandte er sich den Wirtschaftswissenschaften zu. Er wurde 1961 Professor für Mathematik und Wirtschaft in Nowosibirsk und leitete von 1971 bis 1976 das Forschungslabor des Instituts für nationale ökonomische Planung.

Kantorowitsch widmete sich bereits früh auch ganz praktischen Fragestellungen. So arbeitete er beispielsweise ab 1938 als Berater für eine Furnierholzfabrik. Um die Produktionsabläufe und den Einsatz der knappen Ressourcen zu optimieren, entwickelte er eine Methode, die heute als lineare Programmierung bekannt ist. Für seine Beiträge auf diesem Gebiet erhielt er 1975 zusammen mit Tjalling Koopmans den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften.