



G. Ch. Young

Mai

Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
						1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29	30	31					

Das Weierstraßsche Monster

Im Jahr 1872 gab Karl Weierstraß (CB Januar 2011, Juni 2017) eine stetige Funktion an, die nirgends differenzierbar ist. Andere Mathematiker vor ihm hatten solche Funktionen zwar schon entdeckt, aber während ihrer Lebenszeit nicht veröffentlicht. Weierstraß' Beispiel war von der Form

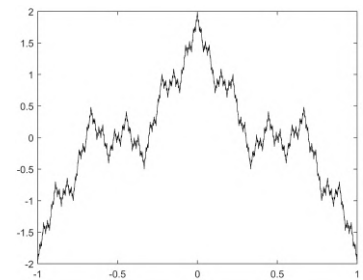
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x), \quad (1)$$

wobei a und b gewissen Einschränkungen unterworfen sind. G. H. Hardy zeigte 1916, dass diese Bedingungen zu $0 < a < 1$ und $ab \geq 1$ abgeschwächt werden können.

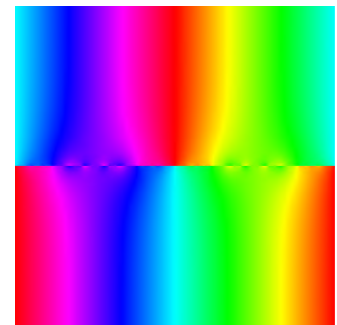
Weierstraß' Ergebnis kam vollkommen unerwartet, denn es schien intuitiv klar zu sein, dass stetige Funktionen „meistens“ differenzierbar sind. Wegen ihres ungewöhnlichen Verhaltens wird die Funktion auch als „Weierstraßsches Monster“ bezeichnet.

Im Jahr 1916 betrachtete Grace Chisholm Young „unendliche Ableitungen“ und zeigte, dass die Intuition nicht so weit von der Wahrheit entfernt ist, wie es uns das Monster glauben lässt. Sie bewies, dass bei Betrachtung der sogenannten oberen und unteren Ableitung einer fast überall endlichen, messbaren Funktion die Menge der Punkte, wo diese beiden Ableitungen endlich, aber verschieden sind, in gewissem Sinn sehr klein ist. Ähnliche Ergebnisse gibt es auch, wenn diese Ableitungen nicht endlich sind. Chisholm Young bemerkte, dass in Punkten, in denen f nicht differenzierbar ist, trotzdem ein unendlicher rechts- oder linksseitiger Differentialquotient existieren kann: „Solch ein Punkt kann eine Spitze mit senkrechter Tangente sein, . . . aber . . . solche Spitzen kann es höchstens abzählbar viele geben“. Sie folgerte weiter, dass Weierstraß' Kurve „nicht wirklich eine Kurve ohne Tangenten ist, sondern in jedem Intervall unendlich viele Spitzen mit senkrechten Tangenten hat.“

Der Graph der 10. Partialsumme der Reihe (1) mit $a = 1/2$ und $b = 3$ im Intervall $[-1, 1]$ ist rechts dargestellt. Der Graph des Monsters ist ein „selbstähnliches“ Fraktal. Indem man in ihn hineinzoomt, kann man sich die Nicht-Differenzierbarkeit veranschaulichen: Wie weit man auch vergrößert, das Bild wird immer ähnlich bizarr aussehen und sich niemals einer Geraden annähern.



Um eine komplexe Form von Weierstraß' Monster zu erhalten, schreiben wir $\cos z$ (in Analogie zur Formel von Plemelj-Sochocki im April) als Differenz $f_+(z) - f_-(z)$ der Funktionen $f_+(z) = e^{iz}/2$ und $f_-(z) = -e^{-iz}/2$, von denen eine in der oberen und eine in der unteren Halbebene analytisch und beschränkt ist. Die mit diesen Funktionen gebildete Reihe (1) konvergiert in \mathbb{C} und ist in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar. Die nebenstehende Abbildung zeigt ein Phasenporträt der zehnten Partialsumme dieser Reihe mit $a = 1/2$ und $b = 3$. Im Bild des Monats ist die Ableitung dieser Funktion dargestellt.



Grace Chisholm Young (1868 – 1944)

nahm im Alter von 22 Jahren am Girton College in Cambridge ein Studium auf. Eigentlich wollte sie Medizin studieren, da ihre Familie das aber nicht erlaubte, schrieb sie sich für Mathematik ein. Als Ada Isabel Maddison sie dazu aufforderte, nahm sie auch an der Abschlußprüfung der Universität Oxford teil und wurde dort Beste. Sie ist damit der erste Mensch mit Abschlüssen erster Klasse in Cambridge und Oxford. Weil Frauen damals in England nicht zur Promotion zugelassen wurden, ging sie nach Göttingen, um ihre Ausbildung bei Felix Klein fortzusetzen.

Grace Chisholm heiratete William Henry Young und neben sechs Kindern gingen aus dieser Ehe viele gemeinsame mathematische Arbeiten hervor. Die hier diskutierte Arbeit ist allerdings allein unter ihrem Namen veröffentlicht. Für ihre Beiträge zum Denjoy-Saks-Young-Theorem erhielt sie 1915 den Gamble-Preis für Mathematik des Girton Colleges. Das Paar schrieb auch Bücher, darunter ein Lehrbuch über Mengenlehre. William wurde seine mathematischen Errungenschaften die Sylvester-Medaille der Royal Society verliehen und Grace erhielt posthum die Ehrendoktorwürde des Girton Colleges. Eines ihrer Enkel ist Sylvia Wiegand, emeritierte Professorin an der Universität von Nebraska-Lincoln und ehemalige Präsidentin der Association for Women in Mathematics.