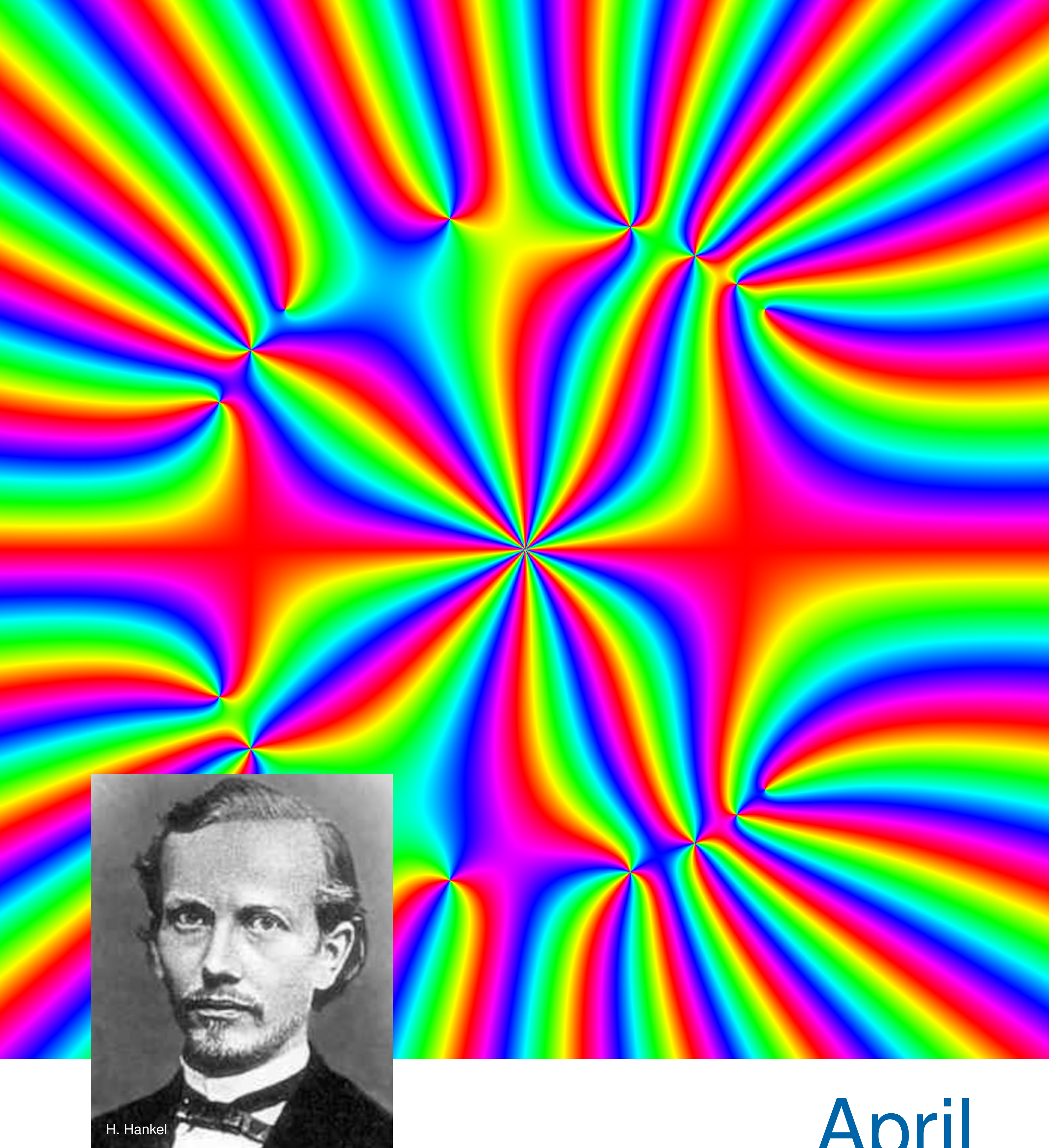

H. Hankel

April

Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30									

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERGAKADEMIE FREIBERG

Hankel-Determinanten

In seiner Dissertation betrachtet Hermann Hankel eine Klasse von Matrizen, die heute als *Hankel-Matrizen* bezeichnet werden. Diese quadratischen Matrizen haben die Eigenschaft, dass ihre Einträge längs der von links unten nach rechts oben verlaufenden Gegendiagonalen konstant sind. Eine 4×4-Hankel-Matrix sieht so aus:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & e \\ c & d & e & f \\ d & e & f & g \end{pmatrix}$$

Hankel-Matrizen treten in verschiedenen Situationen auf, zum Beispiel, wenn in numerischen Algorithmen Operationen mit Polynomen auf Berechnungen mit Matrizen zurückgeführt werden. Die wohl bekannteste $n\times n$-Hankel-Matrix ist die *Hilbert-Matrix* $H_n = (H_{ij})$ mit $H_{ij} = 1/(i+j-1)$. Diese Matrizen wurden von David Hilbert in Verbindung mit einem Problem der Approximationstheorie betrachtet und in den Anfangszeiten des digitalen Rechnens intensiv untersucht.

Hankel untersucht in seiner Dissertation auch Möglichkeiten der Berechnung von Determinanten von Hankel-Matrizen. Determinanten können prinzipiell unter Verwendung der Einträge der Matrix rekursiv berechnet werden, beginnend mit der Determinante einer 2×2-Matrix:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Determinanten kodieren Eigenschaften einer Matrix. So gilt $\det A = 0$ genau dann, wenn die Matrix A singulär (nicht invertierbar) ist. Die Determinante der Hilbert-Matrix H_n ist

$$\det H_n = \frac{(1!\,2!\,\cdots\,(n-1)!)^4}{1!\,2!\,\cdots\,(2n-1)!} \sim 2^{-2n^2}.$$

Für große Werte von n ist diese Determinante fast Null, so dass sich numerische Algorithmen ähnlich verhalten können, als wäre die Matrix singulär.

Die im Bild dieses Monats dargestellte Funktion ist die Determinante einer speziellen Hankel-Matrix, die Hankel in seiner Dissertation für Matrizen beliebiger Dimension explizit berechnet hat. Die Einträge dieser Matrix sind Funktionen der komplexen Variablen z, wodurch die Berechnungen zusätzlich erschwert werden. Die von z abhängige Determinante ist für eine 3×3-Matrix im Quadrat $|\mathrm{Re}\, z| < 1.5$, $|\mathrm{Im}\, z| < 1.5$ dargestellt.

Hermann Hankel (1839 – 1873)

wurde in Halle geboren. An der Leipziger Universität studierte er unter anderem bei August Ferdinand Möbius und seinem Vater, Wilhelm Gottlieb Hankel. Danach hörte er Vorlesungen bei Riemann in Göttingen und bei Weierstraß und Kronecker in Berlin. Nach der Promotion in Leipzig hatte er Professuren in Erlangen und Tübingen inne. Schwerpunkte seiner Arbeit waren die algebraische Theorie von komplexen Zahlen und Quaternionen, komplexe Funktionen und Mathematikgeschichte.

Außer in den Hankel-Matrizen und -Operatoren lebt sein Name in den Hankel-Funktionen und der Hankel-Transformation fort. Letztere beschreibt eine gegebene Funktion als gewichtete Superposition (einer unendlichen Zahl) von Bessel-Funktionen und tritt auf, wenn die mehrdimensionale Fourier-Transformation in hypersphärischen Koordinaten geschrieben wird. Derartige Darstellungen sind oft nützlich, wenn ein Problem zylindrische oder sphärische Symmetrien besitzt.

Hankel ist auch für seine 1867 erschienene Arbeit *Theorie der complexen Zahlensysteme* bekannt, in der er die Bedeutung von Hermann Graßmanns Ideen würdigt und diese damit bekannter macht. Seine Umformulierung des Riemannschen Integrabiltätskriteriums hebt maßtheoretische Eigenschaften von Punktmengen hervor. Obwohl er die Konzepte von „Nullmengen“ und „nirgends dichten Mengen“ nicht sauber trennt, markieren seine Arbeiten einen wichtigen Schritt hin zur modernen Integrationstheorie. Hankel starb am 29. August 1873 in Schramberg im Schwarzwald.

https://www.encyclopedia.com/science/dictionaries-thesauruses-pictures-and-press-releases/hankel-hermann