

März

Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
29	30	31											

Das Superpositionsprinzip

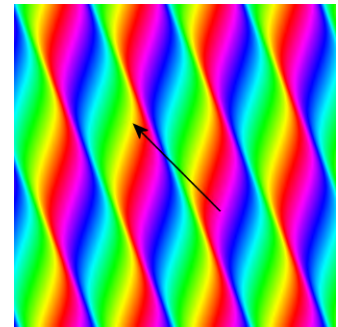
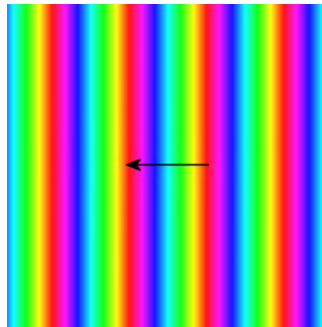
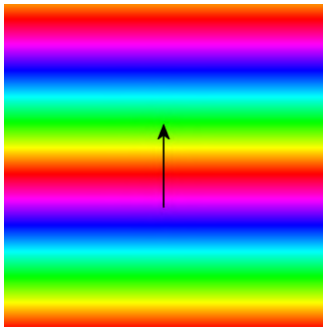
Mathematische Aspekte schwingender Saiten wurden erstmalig von Jean le Rond d'Alembert, Leonhard Euler, Daniel Bernoulli, Joseph-Louis Lagrange und anderen untersucht. Die eindimensionale *Wellengleichung* wurde 1746 von d'Alembert aufgestellt (siehe Februar). Hier betrachten wir ihre räumlich zweidimensionale Variante

$$u_{tt}(t, x, y) = c^2 (u_{xx}(t, x, y) + u_{yy}(t, x, y)),$$

mit einer positiven reellen Konstante c . Eine Lösung dieser partiellen Differentialgleichung ist eine von der Zeit t und den Ortskoordinaten x, y abhängige Funktion $u = u(t, x, y)$.

Die Wellengleichung ist linear, d.h., wenn $u_1(t, x, y)$ und $u_2(t, x, y)$ zwei Lösungen dieser Gleichung sind, dann gilt dies auch für alle Linearkombinationen $a_1 u_1(t, x, y) + a_2 u_2(t, x, y)$ mit beliebigen Konstanten a_1 und a_2 . Diese grundlegende Tatsache wird *Superpositionsprinzip* genannt und wurde (nach Einschätzung von Léon Brillouin) erstmals von Daniel Bernoulli 1753 formuliert.

Das linke und das mittlere Bild visualisieren ebene Wellen $u_1(t_0, x, y)$ und $u_2(t_0, x, y)$ zu einer fixierten Zeit t_0 . Die Wellen laufen in Richtung der Pfeile, beide haben die gleiche Amplitude, und die Farben entsprechen der Phasenlage. Ihre Überlagerung $u = u_1 + 1.5 u_2$ ist im rechten Bild dargestellt. Das Titelbild dieses Monats zeigt die gleiche Funktion, wobei die Auslenkung der Welle in der Farbgebung als Grauwert berücksichtigt wurde.



Wellen sind in vielen Bereichen der Physik und der Ingenieurwissenschaften bedeutsam: Optik, Akustik, Hydrodynamik, Elektrodynamik, Quantenmechanik, Seismik, Astrophysik und anderen.

Kurz nach d'Alemberts Entdeckung verallgemeinerte Euler die Wellengleichung auf drei räumliche Dimensionen. Weil diese ebenfalls eine lineare partielle Differentialgleichung ist, gilt für sie auch das Superpositionsprinzip, obwohl Euler das zunächst bezweifelte. Erst durch Joseph Fourier gelangte das Prinzip zu weitreichender Akzeptanz.

Daniel Bernoulli (1700 – 1782)

wurde in Groningen (Niederlande) geboren. Als er fünf Jahre alt war, kehrte die Familie in ihre Heimatstadt Basel in der Schweiz zurück. Sein Vater drängte ihn zum Medizinstudium, unterrichtete ihn aber nebenbei in Mathematik. Daniel schloss seine Studien in Basel, Heidelberg und Strasbourg mit einer Promotion in Anatomie und Botanik und einem tiefgreifenden Verständnis der Mathematik ab.

Daniel und sein Bruder Nicolaus II wurden 1725 an die Russische Akademie der Wissenschaften nach St. Petersburg berufen. Daniels Bruder starb jedoch bereits ein Jahr nach der Ankunft. Um Daniels Verzweiflung zu mildern, schickte ihm sein Vater einen Schüler nach St. Petersburg – dieser Freund aus Daniels Baseler Zeit war Leonhard Euler. Obwohl diese Zeit enger gemeinsamer Arbeit wissenschaftlich sehr fruchtbar war, war Daniel im rauen Klima unglücklich. So kehrte er 1733 nach Basel zurück, wo er zunächst Botanik, danach Physiologie und schließlich Physik lehrte.

Daniel ist einer der acht herausragenden Mathematiker der Bernoulli-Familie, zu denen auch sein Vater und seine zwei Brüder gehören. Sein Vater war jedoch eifersüchtig auf die Erfolge seines Sohnes, was schließlich ihr Verhältnis zerstörte. Daniel Bernoulli arbeitete in vielen Gebieten der Mathematik und Physik; insbesondere ist er für das *Bernoulli-Prinzip* bekannt, das auch in seinem Hauptwerk *Hydrodynamica* enthalten ist. Er war gewähltes Mitglied vieler wissenschaftlicher Gesellschaften und gewann zehnmal den Großen Preis der Pariser Akademie.