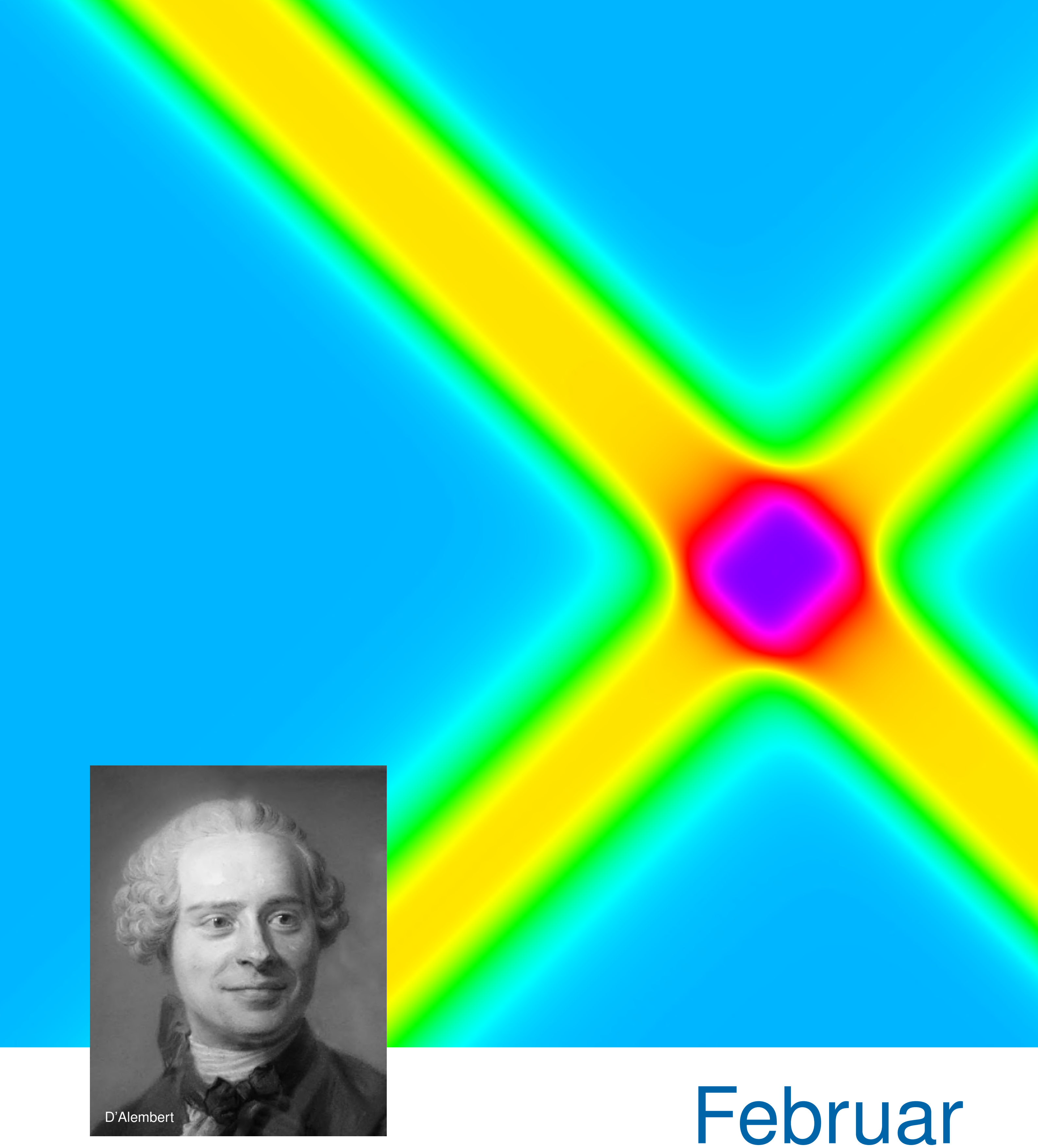


Februar

Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

Die d'Alembertsche Lösungsformel

Eine der grundlegenden partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik ist die eindimensionale Wellengleichung

$$u_{tt}(t,x) = c^2\, u_{xx}(t,x).$$

Sie beschreibt beispielsweise die Auslenkung einer Saite zum Zeitpunkt t am Ort x, oder auch die mechanische Spannung in einem longitudinal ausgelenkten Stab. In der positiven Konstanten c werden dabei Materialeigenschaften von Saite oder Stab zusammengefasst. Der betrachtete Abschnitt sei unendlich ausgedehnt, so dass x alle reellen Werte annehmen kann, und durch

$$u(0,x) = \varphi(x), \qquad u_t(0,x) = \psi(x)$$

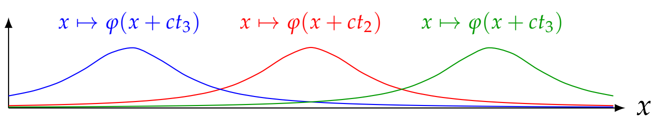
seien die Auslenkung und Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ vorgegeben. Die Lösung dieses Anfangswertproblems kann dann explizit durch die *d'Alembertsche Formel*

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x-ct) + \varphi(x+ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)\, ds$$

angegeben werden. Ist Ψ eine Stammfunktion zu ψ, so lässt sich dies auch in der Form

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x-ct) + \varphi(x+ct)\right) + \frac{1}{2c}\left(\Psi(x+ct) - \Psi(x-ct)\right)$$

schreiben, d.h. die Lösung ist die Überlagerung von vier Wellen, von denen zwei nach links und zwei nach rechts laufen, alle jeweils mit der konstanten Geschwindigkeit c. Je zwei dieser Wellen sind die Verschiebungen eines ansonsten gleich aussehenden Funktionsgraphen entlang der x-Achse.



Nebenstehendes Bild zeigt den Graphen von $x \mapsto \varphi(x+ct)$ für drei Werte $t_1 < t_2 < t_3$, das Bild des Monats stellt die Funktion $\exp(\mathrm{i}u)$ in Abhängigkeit von der komplexen Variablen $x + \mathrm{i}t$ für $\psi \equiv 0$ dar, so dass sich hier nur zwei laufende Wellen kreuzen.

Jean le Rond d'Alembert (1717 – 1783)

wurde kurz nach seiner Geburt von seiner Mutter, der späteren Salonnière Claudine Guérin de Tencin, auf den Stufen von St Jean Le Rond (einer heute nicht mehr existierenden Seitenkapelle von Notre Dame in Paris) ausgesetzt. Da sich der Artillerieoffizier Louis Camus Destouches um seine Unterbringung in einer Gastfamilie und seine Schulbildung bemühte und ihm bei seinem Tod 1726 eine lebenslange Rente vermachte, galt er lange Zeit als sein Vater. Nach einer neueren Theorie handelte Destouches im Auftrag des kaiserlichen Feldmarschalls Herzog von Arenberg. Dafür spricht der Name Jean d'Aremberg, der erst später zu Jean d'Alembert wurde.

Während des Besuchs des Collège des Quatre-Nations beschäftigte sich d'Alembert bereits autodidaktisch mit Mathematik, entschied sich aber für ein Jurastudium. Bevor er dieses 1738 abschloss, versuchte er sich noch kurz an der Medizin. Danach wandte er sich endgültig der Mathematik zu und präsentierte 1739 seine erste Arbeit an der Akademie der Wissenschaften. Zwei Jahre später wurde er selbst Mitglied der Akademie, 1754 wurde er in die Académie française aufgenommen. Die Präsidentschaft der Berliner Akademie der Wissenschaften lehnte er ab.

D'Alembert beschäftigte sich mit Fluiddynamik und Mechanik (d'Alembertsches Prinzip für ein mechanisches System mit Zwangsbedingungen) und stellte als erster die Wellengleichung auf (1746). Als Mitherausgeber von Diderots Encyclopédie verfasste er mehr als 1700 meist naturwissenschaftliche Artikel. Er definierte die Ableitung als Grenzwert von Differenzenquotienten und fand das Quotientenkriterium für die Konvergenzuntersuchung von Reihen. D'Alembert leistete Beiträge zum Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra, der im Französischen nach ihm benannt wird. Daneben publizierte er über Musiktheorie, Astronomie und Philosophie und übersetzte antike Schriften aus dem Latein. Als bekennender Materialist wurde er anonym bestattet.

Françoise Launay: *Les identités de d'Alembert*, Recherches sur Diderot et sur l'Encyclopédie, 47, 2012, abgerufen am 18.8.2020 unter `http://journals.openedition.org/rde/4949`