E. N. Laguerre

Januar

Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31							

Laguerre-Polynome

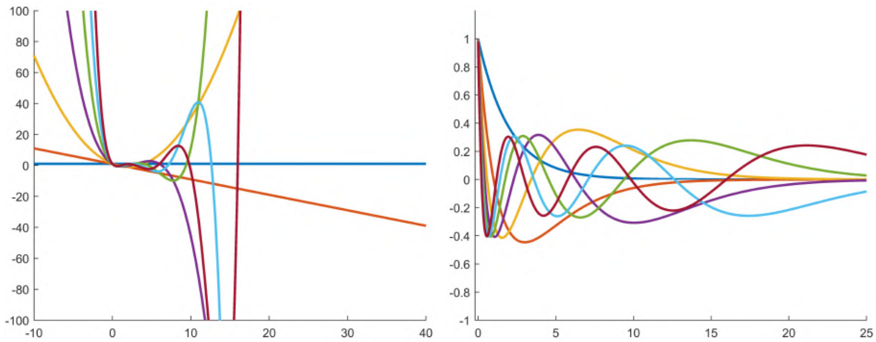
Für jede reelle Zahl α und jede natürliche Zahl n hat die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + ny = 0 \tag{1}$$

eine polynomiale Lösung vom Grad n. Laguerre untersuchte dies zuerst 1879 für $\alpha = 0$. In diesem Fall nennt man (1) *Laguerresche Differentialgleichung* und ihre polynomiale Lösung $L_n(x)$ heißt *Laguerre-Polynom*. Ist $\alpha \neq 0$, gibt es immer noch polynomiale Lösungen, die als *verallgemeinerte* (oder *assoziierte*) *Laguerre-Polynome* bezeichnet werden. Wenn n keine natürliche Zahl ist, nennt man die Lösungen der Differentialgleichung *Laguerre-Funktionen*. Laguerre-Polynome L_n haben viele interessante Eigenschaften. Die Folge (L_n) ist ein orthogonales System bezüglich des Skalarprodukts mit dem Gewicht $\mathrm{e}^{-x/2}$ auf der positiven reellen Achse. Dies qualifiziert die Laguerre-Polynome als Bausteine für Basen verschiedener Funktionenräume. Zur Herleitung und Berechnung der Polynome gibt es mehrere Möglichkeiten: explizite Formeln, Rekursionsformeln, Kettenbrüche und ein komplexes Kurvenintegral. Für $\alpha = 0$ wurden einige dieser Zugänge bereits von Laguerre untersucht.

Die Bedeutung der Laguerre-Polynome in der mathematischen Physik wurde erst wesentlich später erkannt. Insbesondere werden sie sehr intensiv in der Quantenphysik verwendet. So beschreiben verallgemeinerte Laguerre-Polynome die Eigenfunktionen radialer Wellen für das Coulomb-Potential. In jüngerer Zeit finden die sogenannten *Laguerre-Gauß-Moden*, in deren Konstruktion verallgemeinerte Laguerre-Polynome eingehen, als vollständige Orthonormalbasis Anwendungen in der *Quantentomographie*.

Das linke kleine Bild zeigt die Graphen der ersten sieben Laguerre-Polynome L_n. Im Bild auf der rechten Seite sehen wir die Produkte von L_n mit der (Gewichts-)Funktion $e^{-x/2}$ für die gleichen Werte von n. Das Bild des Monats ist ein Phasenporträt der komplexen Funktion $e^{-z/2}L_8(z)$ im Quadrat $-10 \leq \mathrm{Re}\,(z) \leq 40$ und $-25 \leq \mathrm{Im}\,(z) \leq 25$.



Edmond Nicolas Laguerre (1834 – 1886)

wurde in Bar-le-Duc in der Lorraine geboren. Trotz seiner schlechten Gesundheit studierte er ab 1852 an der École Polytechnique. Nach dem Abschluss wurde er 1854 Artillerieoffizier und arbeitete in einer Waffenfabrik. Zehn Jahre später kehrte er an die École Polytechnique zurück; zunächst als Tutor, dann als Prüfer. Ab 1883 war er Professor für mathematische Physik am Collège de France.

Laguerres mathematisches Schaffen ist sehr umfangreich, besonders wenn man bedenkt, dass er nur 22 Jahre auf diesem Gebiet arbeitete. Er betrachtete sich selbst Vertreter der Geometrie, wo Laguerre-Geometrie, Laguerre-Transformation und Laguerre-Inversion nach ihm benannt sind. Eines seiner bleibenden Ergebnisse ist eine Formel für die Größe des Winkels zwischen zwei Geraden, die das Doppelverhältnis aus der projektiven Geometrie verwendet. Außerdem leistete er wesentliche Beiträge zur Theorie algebraischer Gleichungen, zur Untersuchung von Kettenbrüchen sowie der Approximationstheorie. Viele seiner Arbeiten fanden später Eingang in allgemeinere Konzepte, beispielsweise die Theorie Liescher Gruppen.

Laguerre wurde als ruhiger Mensch beschrieben, der sich ganz der Mathematik und seiner Familie widmete, insbesondere der Bildung seiner zwei Töchter. Nachdem er 1885 in die Académie des Sciences gewählt worden war, zwangen ihn gesundheitliche Probleme seine Position an der Universität 1886 aufzugeben. Er kehrte nach Bar-le-Duc zurück, wo er sechs Monate später starb.

E. Merzbacher, *Quantum Mechanics*, Wiley, New York 1970.
J. J. O'Connor and E. F. Robertson, *Edmond Nicolas Laguerre*, MacTutor History of Mathematics.
A. Nicolas et al. Quantum state tomography of orbital angular momentum photonic qubits via a projection-based technique. *New Journal of Physics* 17 (2015), 033037.