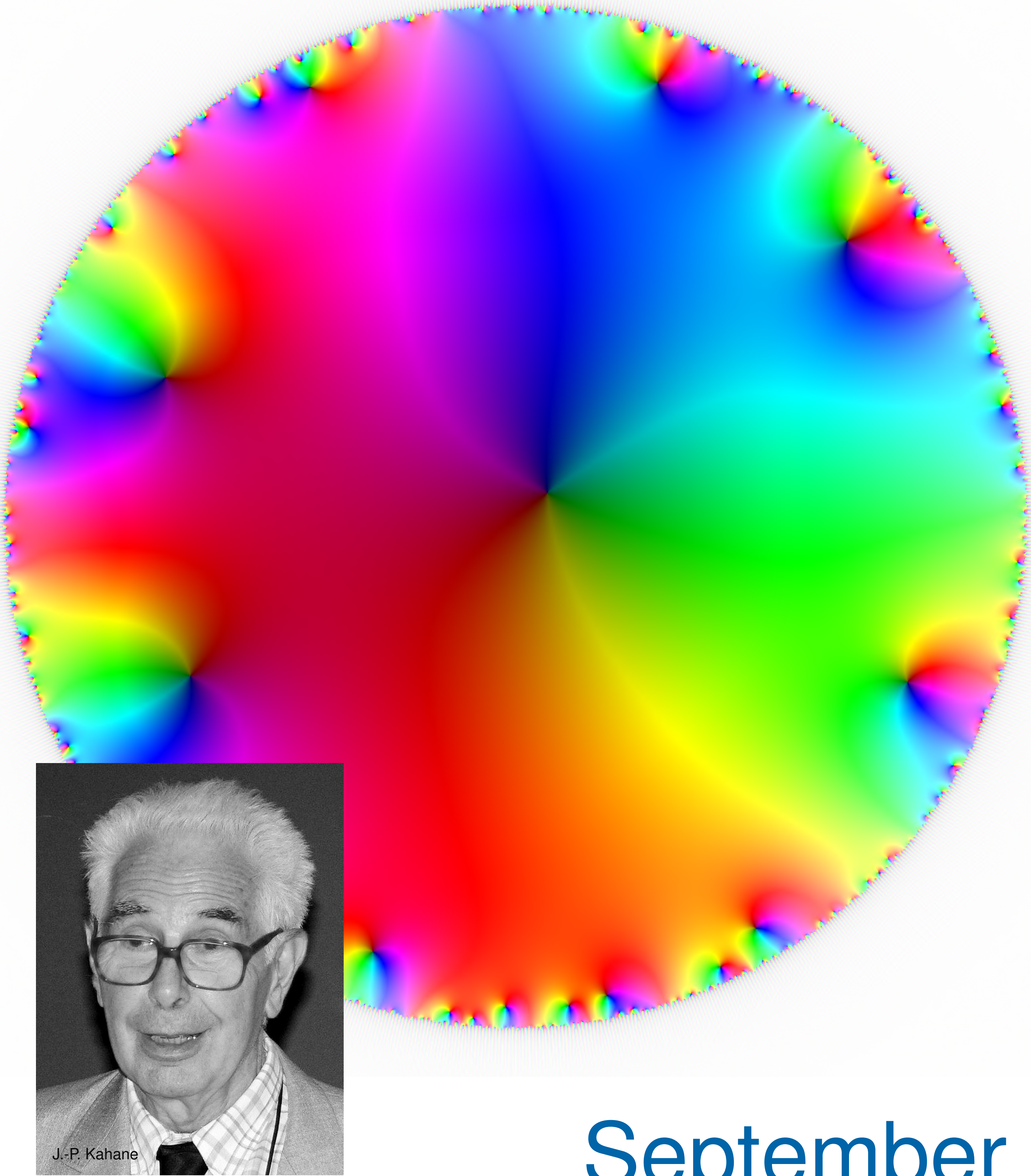


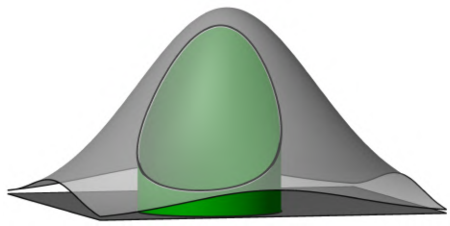
September

Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30										

Zufällige Potenzreihen

Eine Zufallsgröße ist eine Variable Z, deren Werte durch ein Zufallsexperiment bestimmt werden. Beispielsweise ist die Augenzahl beim Würfeln eine solche Zufallsgröße, für die jeder der möglichen Werte $k = 1, \ldots, 6$ mit der Wahrscheinlichkeit $P(Z = k) = 1/6$ eintritt. Für viele Zufallsgrößen ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer beliebigen konkreten Zahl aber gleich Null. Sinnvoller ist es daher, nach der Wahrscheinlichkeit für die Zugehörigkeit der Werte zu einer (Borel-)Menge A zu fragen, $A \subset \mathbb{C}$ im Fall einer komplexwertigen Zufallsgröße Z. Ist diese durch

$$P(Z \in A) = \frac{1}{2\pi} \int_A \mathrm{e}^{-|z|^2/2} d\sigma(z)$$



gegeben, wobei $d\sigma$ das Lebesguemaß in der komplexen Ebene ist, heißt Z (standardisiert) *normalverteilt* in $\mathbb{C}$. Das Integral kann als Volumen des über A unter der Gaußglocke liegenden Bereichs gedeutet werden (im Bild rechts).

Wir betrachten nun Potenzreihen mit zufälligen Koeffizienten, genauer gesagt Reihen der Form

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n \, a_n \, z^n \tag{1}$$

mit unabhängig normalverteilten Zufallsgrößen Z_n und festen positiven Zahlen a_n, für die gilt $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$. Die letzte Bedingung sichert, dass die deterministische Potenzreihe $\sum a_n z^n$ den Konvergenzradius 1 hat, also für $|z| < 1$ konvergiert und für $|z| > 1$ divergiert. Der Konvergenzradius R der Reihe (1) ist dann wieder eine Zufallsgröße, und $F(z)$ ist eine zufällige Funktion.

Es lässt sich nun zeigen, dass mit Wahrscheinlichkeit 1 wieder $R = 1$ gilt, man sagt dazu, das Ereignis $R = 1$ ist *fast sicher*. Ebenso ist es fast sicher, dass der Einheitskreis $\mathbb{T}$ die natürliche Grenze von $F(z)$ ist, d.h. F lässt sich über keinen Teilbogen von $\mathbb{T}$ hinaus analytisch fortsetzen. Falls $\sum a_n^2 < \infty$ gilt, so konvergiert (1) fast sicher auch noch fast überall auf $\mathbb{T}$, falls hingegen $\sum a_n^2 = \infty$ ist, so verhält sich F am Rand des Einheitskreises besonders wild: fast sicher divergiert (1) fast überall auf $\mathbb{T}$ und nach einem Ergebnis von Jean-Pierre Kahane füllt $F(\mathbb{D})$ die gesamte komplexe Ebene.

Das Bild des Monats zeigt das Ergebnis eines solchen Zufallsexperiments mit $a_n = 1/\sqrt{n}$ unter Berücksichtigung der ersten 1000 Summanden der Reihe (1). Die Reihe $\sum a_n^2$ ist in diesem Fall die divergente harmonische Reihe – die Herausbildung der natürlichen Grenze der Funktion F ist bereits deutlich erkennbar. Bei der Färbung des Phasenporträts wurde der Betrag der Funktionswerte durch die Helligkeit berücksichtigt – in den fast weißen Bereichen sind diese Werte sehr groß.

Jean-Pierre Kahane (1926 – 2017)

wurde in Paris als Sohn eines Professors der Biochemie geboren und studierte dort an der École normale supérieure. Er arbeitete zunächst am Centre national de la recherche scientifique und promovierte dort 1954 bei Szolem Mandelbrojt. Im selben Jahr wurde er Dozent und anschließend Professor in Montpellier. Von 1961 bis zu seiner Emeritierung 1994 wirkte er dann an der Universität Paris-Süd in Orsay.

Trotz seiner umfangreichen wissenschaftlichen Tätigkeit hatte Kahane eine Reihe von Ämtern inne, darunter Präsident der Societé mathématique de France (1972–1973), Präsident der Universität Paris-Süd (1975–1978) und Mitglied der Académie des sciences. Lebenslang engagierte er sich in der Kommunistischen Partei.

Kahanes Hauptarbeitsgebiete waren harmonische Analysis und Fourierreihen (u.a. das Kahane-Katznelson-de-Leeuw-Theorem, das besagt, dass zu $(c_n) \in \ell^2$ eine stetige Funktion f mit Fourierkoeffizienten $|\hat{f}(n)| \geq |c_n|$ existiert), Funktionalanalysis (u.a. Satz von Gleason-Kahane-Żelazko über die Charakterisierung multiplikativer linearer Funktionale auf einer komplexen Banachalgebra), probabilistische Methoden in der Analysis und Brownsche Bewegung (u. a. Beweis von Eigenschaften sogenannter Mandelbrot-Martingale), Zahlentheorie (u. a. Beweis der Bateman-Diamond-Vermutung über Beurlingsche verallgemeinerte Primzahlen).

S.-P. Kahane: *Some random series of functions*, 2nd edition, Cambridge University Press 1985.
J. Barral, J. Peyrière, H. Queffélec: *ICMI column – the mathematical legacy of Jean-Pierre Kahane.* Eur. Math. Soc. Newsl. No. 108 (2018), 43–47.