

W. N. Faddeewa

# Mai

Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
					1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31						

# Wera Faddeewa und die $w$ -Funktion (von André Weideman)

Die durch die Formel

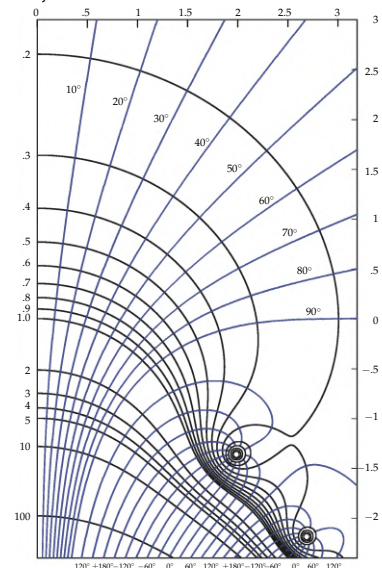
$$w(z) = e^{-z^2} \operatorname{erfc}(-iz) = e^{-z^2} \left( 1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{t^2} dt \right), \quad z \in \mathbb{C},$$

definierte Funktion hat viele Namen: Plasma-Dispersions-Funktion, komplexe Fehlerfunktion, Kramp-Funktion, Faddeewa-Funktion, oder einfach  $w$ -Funktion. Genauso zahlreich sind ihre Anwendungsgebiete: Plasmawellen, verdünnte Gase, subatomare Teilchen, Spektroskopie und andere mehr.

Die Funktion  $w(z)$  stimmt mit der Mittag-Leffler function  $E_{1/2}(iz)$  überein (CB Juli 2014). Sie kann auch als Hilbert-Transformation der Gauß-Funktion (Dichtefunktion der Normalverteilung) oder, equivalent dazu, als Faltung der Gauß-Funktion mit der Dichtefunktion der Cauchy-Lorentz-Verteilung dargestellt werden. Diese Integraldarstellungen bilden die Grundlage vieler numerischer Algorithmen zur Berechnung von  $w(z)$ , wie es Wera Faddeewa und ihr Kollege N. M. Terentiev in ihrem imposanten Werk „Tables of values of the function  $w(z)$  for complex argument“ getan haben, das 1954 in Russisch veröffentlicht und 1961 ins Englische übersetzt wurde.

Wie das Gaußsche Fehlerintegral  $\operatorname{erf}(z)$  (CB Juni 2012) ist auch  $w(z)$  eine ganze Funktion. Die Entscheidung zur Tabellierung der  $w$ -Funktion, statt einer der damit verwandten Funktionen, war vermutlich dadurch begründet, dass  $w(z)$  im ersten Quadranten beschränkt ist. Werte in den anderen Quadranten können daraus leicht abgeleitet werden, ebenso wie die Werte von  $\operatorname{erf}(z)$ , des Dawson-Integrals, der Fresnel-Integrale (CB Oktober 2013), der Voigt-Funktionen, und anderer.

Der von Faddeewa und Terentiev entwickelte Zugang zur numerischen Tabellierung der  $w$ -Funktion ist bis heute aktuell. Sie teilen den ersten Quadranten in mehrere Gebiete auf und verwenden jeweils einen speziellen Algorithmus. In der Nähe des Ursprungs nutzen sie Taylorreihen. Weiter entfernt wenden sie zwei Typen von Quadraturformeln auf Integraldarstellungen an, nämlich die Gauß-Hermite-Formel und die Trapezregel. Für letztere geben sie Fehlerabschätzungen an, die auf der Euler-Maclaurin-Formel aufbauen. Wegen der schnell abklingenden Gaußschen Gewichtsfunktion sind diese beiden Quadraturformeln zur numerischen Berechnung der Integrale fast optimal. Alles in allem enthält das Buch sechstellige Tafeln der  $w$ -Funktion für einen großen Bereich des ersten Quadranten. Obwohl diese Tafeln durch moderne numerische Algorithmen überflüssig geworden sind, bleiben sie ein bewundernswertes Beispiel der verlorenen Kunst der Tabellierung von Funktionen.



Das Bild dieses Monats zeigt die  $w$ -Funktion im Bereich  $|\operatorname{Re} z| \leq 5$ ,  $-7.2 \leq \operatorname{Im} z \leq 2.8$ . Das kleine Bild oben ist einer Abbildung der  $w$ -Funktion aus den klassischen Tafeln von Abramowitz and Stegun nachempfunden<sup>1</sup> und entspricht dem Stand der Visualisierung in den 1970er Jahren.

## Wera Nikolajewna Faddeewa (1906 – 1983)

wurde als Wera Samjatina am 20. September 1906 in Tambow (Russland) geboren. 1930 heiratete sie ihren Mathematiker-Kollegen Dmitri Konstantinowitsch Faddeew. Das Paar hatte drei Kinder und wurde eines der erfolgreichsten Mann-Frau-Teams in der Geschichte der Mathematik.

1930 erwarb Faddeewa an der Staatlichen Leningrader Universität den ersten Doktorgrad („Kandidat Nauk“), den zweiten Doktorgrad („Doktor Nauk“) erhielt sie 1946 von derselben Institution. Die dazwischen liegenden Jahre verbrachte sie an verschiedenen Ingenieureinrichtungen in Leningrad. Als die Stadt im Zweiten Weltkrieg belagert wurde, hielt sie sich im Exil auf.

Als Faddeewa eine Anstellung am Steklov-Institut erhalten hatte, spezialisierte sie sich auf numerische Methoden der linearen Algebra. Ihre dazu ab 1950 veröffentlichten Bücher werden oft als erste Monographien auf diesem Gebiet angesehen. Erweiterte Auflagen verfasste sie mit ihrem Ehemann.

Die  $w$ -Funktion war nicht Faddeewas einziger Beitrag zum Gebiet der speziellen Funktionen, so veröffentlichte sie 1950 gemeinsam mit ihrem Kollegen Mark Konstantinowitsch Gawurin umfangreiche Tafeln von Bessel-Funktionen ganzzahliger Ordnung.

<sup>1</sup> Weil wir die Genehmigung zur Veröffentlichung des Originalbildes nicht rechtzeitig erhalten haben, wurde die Abbildung neu berechnet.