Kapitel 4

Elementare Funktionen

(Prof. Sebastian Aland, Skript von Prof. Michael Eiermann)

In diesem Abschnitt werden wir einfache Funktionen untersuchen, die Ihnen wahrscheinlich schon bekannt sind. Uns interessieren Polynome, rationale Funktionen und einige spezielle Funktionen. Sie werden im Lauf Ihres Studiums erkennen, dass es aus vielen Gründen zweckmäßig ist, die komplexen Zahlen als den natürlichen Definitions- und Wertebereich dieser Funktionen zu wählen. Wir betrachten in dieser Einführung aber nur *reelle Funktionen.* Darunter verstehen wir Funktionen, die auf Teilmengen der reellen Zahlen[1] definiert sind und die außerdem *reellwertig* sind. Der *Graph* einer Funktion $f : \mathbb{R} \supseteq X \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$, ist definiert als[2] $\{(x, f(x)) : x \in X\} \subset \mathbb{R}^2$. Umgangssprachlich ist der Graph von f eine „Kurve in der Ebene“. Mit seiner Hilfe kann man sich „ein Bild von f machen“.

4.1 Punktweise definierte Operationen

Mit der Komposition zweier Funktionen (vgl. Definition **??**) ist Ihnen bereits eine Methode bekannt, mit der aus bekannten Funktionen neue konstruiert werden können. Die üblichen arithmetischen Operationen (für Zahlen) lassen sich auch für Funktionen definieren, so dass man z. B. die Summe oder das Produkt zweier Funktionen bilden kann.

Definition 4.1.1. Seien $X \subseteq \mathbb{R}$ und $f, g : X \to \mathbb{R}$ zwei auf X definierte reellwertige Funktio-

[1] Für eine mathematisch exakte Definition der reellen Zahlen verweisen wir auf die Vorlesungen des ersten Semesters. Man kann sich reelle Zahlen als unendliche Dezimalbrüche oder anschaulicher als Punkte auf der Zahlengeraden vorstellen, dabei gehört zu jeder reellen Zahl genau ein Punkt und zu jedem Punkt genau eine reelle Zahl. Dass dies keine wirklichen Definitionen sind, erkennt man schon daran, dass die Begriffe „unendlicher Dezimalbruch“ und „Zahlengerade“ noch nicht exakt eingeführt wurden.

[2] Bezeichnet $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen, dann ist $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.

nen. Dann werden durch

$$\begin{aligned} f+g &: X \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)+g(x),\\ fg &: X \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)g(x),\\ f/g &: X \setminus \{x \in X\ :\ g(x)=0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)/g(x), \end{aligned}$$

die *Summe*, das *Produkt* bzw. der *Quotient* von f und g definiert. Man spricht von *punktweise definierten Operationen*. Warum wird die *Differenz* nicht definiert?

Viele der Regeln und Gesetze, die uns beim Rechnen mit Zahlen vertraut sind, gelten auch, wenn man die Grundrechenarten auf Funktionen anwendet. Beispielsweise ist $f+g=g+f$, $fg=gf$ (Kommutativgesetze für Addition bzw. Multiplikation) oder $(f+g)h=fh+gh$ (Distributivgesetz). Es gibt aber auch Aussagen, die zwar für Zahlen, nicht aber für Funktionen richtig sind: Aus $xy=0$ ($x,y\in\mathbb{R}$) folgt $x=0$ oder $y=0$. Können Sie Funktionen $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f,g\neq 0$ konstruieren, die $fg=0$ erfüllen[3]?

Stetigkeit (vgl. Definition **??**) ist eine der Eigenschaften, die unter punktweisen Operationen erhalten bleiben:

Lemma 1. Seien $x_0 \in X \subseteq \mathbb{R}$ und $f,g : X \to \mathbb{R}$ stetig in x_0. Dann sind die Funktionen $f+g$ und fg stetig in x_0. Gilt $g(x_0)\neq 0$, so ist auch f/g stetig in x_0.

Beweis. Wir zeigen nur, dass $f+g$ stetig ist. Die anderen Behauptungen beweist man ähnlich. Sei $\varepsilon>0$ beliebig vorgegeben. Weil f stetig in x_0 ist, gibt es zu $\varepsilon/2>0$ ein $\delta_f>0$ mit $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon/2$ für alle $x\in X$ mit $|x-x_0|<\delta_f$. Analog gibt es $\delta_g>0$ mit $|g(x)-g(x_0)|<\varepsilon/2$ für alle $x\in X$ mit $|x-x_0|<\delta_g$.
Wir definieren $\delta=\min\{\delta_f,\delta_g\}>0$ und erhalten für alle $x\in X$ mit $|x-x_0|<\delta$ mithilfe der Dreiecksungleichung[4]

$$\begin{aligned} &|(f+g)(x)-(f+g)(x_0)| = |f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)|\\ \leq\ &|f(x)-f(x_0)|+|g(x)-g(x_0)| < \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist $f+g$ stetig in x_0. ◇

4.2 Polynome

Definition 4.2.1. Seien $n\in\mathbb{N}_0$, $a_0,a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$ mit $a_n\neq 0$. Dann heißt

$$p:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \sum_{j=0}^{n} a_j x^j = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

[3] 0 steht hier für die *Nullfunktion*, die jedes $x\in\mathbb{R}$ auf die Zahl 0 abbildet.
[4] $|x+y|\leq|x|+|y|$ für alle $x,y\in\mathbb{R}$

ein *Polynom*[5] vom *Grad* $n =: \mathrm{grad}(p)$. Die Zahlen a_j, $j = 0, 1, \ldots, n$, nennt man die *Koeffizienten* von p. a_n ist der *führende Koeffizient* von p. Ein Polynom heißt *monisch*, wenn sein führender Koeffizient gleich 1 ist.
Zusätzlich betrachten wir auch die Nullfunktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 0$, als Polynom (ihm wird kein Grad zugeordnet).
Mit $\mathcal{P}_\infty$ bezeichnen wir im Folgenden die Menge aller Polynome und mit $\mathcal{P}_n$ die Teilmenge der Polynome, deren Grad kleiner oder gleich n ist, wobei auch das Nullpolynom Element von $\mathcal{P}_n$ sein soll.

Zwei Polynome sind genau dann gleich, wenn ihre Koeffizienten übereinstimmen.
Summe und Produkt zweier Polynome p und q sind offenbar wieder Polynome. Man kann Folgendes zeigen: $\mathrm{grad}(p+q) \le \max\{\mathrm{grad}(p), \mathrm{grad}(q)\}$ (warum gilt hier nicht Gleichheit?) und $\mathrm{grad}(pq) = \mathrm{grad}(p) + \mathrm{grad}(q)$.

Satz 4.2.2. Jedes Polynom ist stetig in $\mathbb{R}$.

Beweis. Jedes Polynom kann als (endliche) Summe bzw. Produkt der konstanten Funktionen $x \mapsto a \in \mathbb{R}$ und der Identität $x \mapsto x$ dargestellt werden. Da diese Funktionen in $\mathbb{R}$ stetig sind, gilt dies nach Lemma 1 auch für jedes Polynom. $\diamond$

Bekanntlich ist für ganze Zahlen eine „Division mit Rest“ definiert (siehe Satz **??**). So gilt etwa $57 = 5 \cdot 11 + 2$ („57 geteilt durch 5 ergibt 11 mit Rest 2“). Der folgende Satz beschreibt ein analoges Resultat für Polynome.

Satz 4.2.3. Zu vorgebenen Polynomen $p_1, p_2 \in \mathcal{P}_\infty$, $p_2 \neq 0$, gibt es eindeutig bestimmte Polynome $q, r \in \mathcal{P}_\infty$, sodass

$$p_1 = qp_2 + r$$

gilt mit $r = 0$ oder $\mathrm{grad}(r) < \mathrm{grad}(p_2)$. D. h. „$p_1$ geteilt durch p_2 ergibt q mit Rest r“. $\diamond$

Die Aussage dieses Satzes ist nur im Fall $\mathrm{grad}(p_1) \ge \mathrm{grad}(p_2)$ interessant (warum?). Aber auch für diesen Fall werden wir sie nicht beweisen und erinnern stattdessen an den *Divisionsalgorithmus*, mit dem man die Polynome q und r berechnet.

Beispiel 1. Wir teilen zunächst $p_1(x) = x^5 + x^4 - 4x^3 + x^2 - x - 2$ durch $p_2(x) = (x^2 - x - 1)$:

$$\begin{array}{l}
x^5 + x^4 - 4x^3 + x^2 - x - 2 \quad = (x^2 - x - 1)\underbrace{(x^3 + 2x^2 - x + 2)}_{q} \\
\underline{x^5 - x^4 - x^3} \\
\quad 2x^4 - 3x^3 + x^2 \\
\quad \underline{2x^4 - 2x^3 - 2x^2} \\
\qquad -x^3 + 3x^2 - x \\
\qquad \underline{-x^3 + x^2 + x} \\
\qquad\qquad 2x^2 - 2x - 2 \\
\qquad\qquad \underline{2x^2 - 2x - 2} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

[5] Streng genommen müsste man Polynomfunktion sagen. Oft wird auch die Bezeichnung *ganzrationale Funktion* verwendet.

Wir halten fest, dass sich p_1 ohne Rest durch p_2 teilen lässt.
Jetzt teilen wir p_1 (wie oben) durch $p_2(x) = x^2 + x + 1$:

$$\begin{array}{ll}
x^5 + x^4 - 4x^3 + x^2 - x - 2 & = (x^2+x+1)\underbrace{(x^3 - 5x + 6)}_{q} + \underbrace{(-2x-8)}_{r} \\
\underline{x^5 + x^4 + x^3} & \\
\quad - 5x^3 + x^2 - x & \\
\quad \underline{-5x^3 - 5x^2 - 5x} & \\
\qquad 6x^2 + 4x - 2 & \\
\qquad \underline{6x^2 + 6x + 6} & \\
\qquad\quad - 2x - 8 &
\end{array}$$

p_1 geteilt durch p_2 ergibt also $x^3 - 5x + 6$ mit Rest $-2x - 8$.

Als Anwendung des Divisionsalgorithmus werten wir ein Polynom p an einer Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ aus, berechnen also $p(x_0)$. Damit das Problem nicht vollkommen trivial ist, nehmen wir $\mathrm{grad}(p) > 0$ an. Nach Satz 4.2.3 gibt es zu $p_1 = p$ und $p_2(x) = x - x_0 \in \mathcal{P}_1$ eindeutige bestimmte Polynome q und r mit $p_1 = qp_2 + r$ und $r = 0$ oder $\mathrm{grad}(r) < \mathrm{grad}(p_2) = 1$, d. h. r ist eine Konstante (eine Zahl). Außerdem ist $p(x_0) = q(x_0)p_2(x_0) + r = q(x_0)(x_0 - x_0) + r = r$. Man kann $p(x_0) = r$ also durch Polynomdivision bestimmen. Dies ist die Idee des *Horner-Schemas*, das nicht nur weniger Operationen erfordert als die konventionelle Berechnung von $p(x_0)$, sondern auch verbesserte Stabilitätseigenschaften besitzt.

Wir sagen, dass $p_2 \in \mathcal{P}_\infty$, $p_2 \neq 0$, *Teiler* des Polynoms $p_1 \neq 0$ ist, wenn es ein Polynom q gibt mit $p_1 = qp_2$. (Man vergleiche dies mit dem analogen Teilbarkeitsbegriff für ganze Zahlen, siehe § **??**.) Jedes Polynom besitzt triviale Teiler, nämlich sich selbst und alle von Null verschiedenen Konstanten. Es gibt Polynome, die nur triviale Teiler besitzen (sie entsprechen in gewisser Weise den Primzahlen), etwa $p(x) = x^2 + 1$.

Eine reelle Zahl x_0 heißt *Nullstelle* des Polynoms $p \neq 0$, wenn $p(x_0) = 0$ gilt. Nullstellen von Polynomen (und anderen Funktionen) spielen in der Mathematik und ihren Anwendungen eine sehr wichtige Rolle. Leider ist es i. A. unmöglich, Nullstellen „mit Papier und Bleistift" zu bestimmen. Die Nullstelle eines linearen Polynoms (also eines vom Grad 1) liest man ab. Ein Polynom $p(x) = x^2 + a_1x + a_0$ zweiten Grades, von dem wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass es monisch ist (warum?), besitzt die Nullstellen

$$x_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2},$$

was sofort aus $p(x) = (x + a_1/2)^2 - (a_1/2)^2 + a_0$ folgt. Ob p (reelle) Nullstellen besitzt (und wenn ja, wie viele), hängt vom Vorzeichen von $a_1^2 - 4a_0$ ab.

Auch die Nullstellen von Polynomen dritten und vierten Grades lassen sich noch explizit angeben. Die entsprechenden Formeln sind allerdings so kompliziert, dass man bei praktischen Berechnungen in der Regel numerische Verfahren (wie das Newton-Verfahren) einsetzt. Für die Nullstellen eines Polynoms vom Grad 5 oder höher gibt es bewiesenermaßen keine Formeln; hier ist man also immer auf numerische Methoden angewiesen.

Sei $P \in \mathcal{P}_\infty$ mit $\operatorname{grad}(p) \geq 1$. Offensichtlich ist $x_0 \in \mathbb{R}$ genau dann Nullstelle von p, wenn $x - x_0$ das Polynom p (ohne Rest) teilt, wenn es also ein Polynom q gibt mit $p(x) = (x - x_0)q(x)$. Daraus folgt zum einen $\operatorname{grad}(q) = \operatorname{grad}(p) - 1$ und zum anderen

$$\{z \in \mathbb{R} : p(z) = 0\} = \{x_0\} \cup \{z \in \mathbb{R} : q(z) = 0\}.$$

Hat man eine Nullstelle x_0 von p „erraten", so sind die übrigen Nullstellen von p genau die Nullstellen von q. Damit ist auch Folgendes bewiesen.

Satz 4.2.4. Ein Polynom vom Grad n besitzt höchstens n verschiedene Nullstellen. Äquivalent: Besitzt $p \in \mathcal{P}_n$ mehr als n verschiedene Nullstellen, dann ist p das Nullpolynom. $\diamond$

Dieser Satz ist eine stark abgeschwächte Form des sog. *Fundamentalsatzes der Algebra*, der besagt, dass jedes (komplexe) Polynom vom Grad n genau n komplexe Nullstellen besitzt, wobei Vielfachheiten mitgezählt werden.

Wir haben gesehen, dass $x_0 \in \mathbb{R}$ genau dann Nullstelle des Polynoms p ist, wenn man p in der Form $p(x) = (x - x_0)q(x)$ mit einem Polynom q schreiben kann. Gilt $p(x) = (x - x_0)^n q(x)$ für $n \in \mathbb{N}$ und ein Polynom q mit $q(x_0) \neq 0$, dann sagt man, dass die Nullstelle x_0 die (genaue) *Ordnung* (oder *Vielfachheit*) n besitzt.

Bekanntlich gibt es genau eine Gerade durch zwei gegebene Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) der Ebene. Eine i. W. äquivalente Fomulierung dieser Aussage mithilfe von Polynomen lautet: Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$, und $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann existiert genau ein Polynom $p \in \mathcal{P}_1$ (also vom Grad höchstens 1) mit $p(x_j) = y_j$, $j = 1, 2$. Allgemeiner ist ein Polynom vom Grad n durch $n + 1$ Wertepaare eindeutig festgelegt:

Satz 4.2.5. Seien $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ paarweise verschiedene reelle Zahlen und $y_1, y_2, \dots, y_{n+1} \in \mathbb{R}$. Dann gibt es genau ein Polynom $p \in \mathcal{P}_n$ mit $p(x_j) = y_j$ für alle $j = 1, 2, \dots, n + 1$.

Beweis. Wir konstruieren explizit ein Polynom, das die gewünschten Eigenschaften besitzt. Für jedes $k \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$ sei

$$\ell_k(x) := \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n+1} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}.$$

Offenbar ist $\ell_k \in \mathcal{P}_n$ und es gilt

$$\ell_k(x_j) = \begin{cases} 0, & \text{falls } j \neq k, \\ 1, & \text{falls } j = k. \end{cases}$$

Damit ist $p(x) = \sum_{k=1}^{n+1} y_k \ell_k(x) \in \mathcal{P}_n$ mit $p(x_j) = \sum_{k=1}^{n+1} y_k \ell_k(x_j) = y_j \ell_j(x_j) = y_j$.
Es bleibt zu zeigen, dass p eindeutig bestimmt ist. Dazu nehmen wir an, dass es Polynome $p, q \in \mathcal{P}_n$ gibt mit $p(x_j) = q(x_j) = y_j$ für alle $j = 1, 2, \dots, n + 1$. Dann besitzt $p - q \in \mathcal{P}_n$ die Nullstellen $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$, muss also nach Satz 4.2.4 das Nullpolynom sein. $\diamond$

4.3 Rationale Funktionen

Definition 4.3.1. Seien p und q Polynome, $q \neq 0$. Dann nennt man

$$r : \mathbb{R} \setminus \{x \,:\, q(x) = 0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)},$$

eine (gebrochen) *rationale Funktion.* p heißt *Zähler*- und q heißt *Nennerpolynom* von r.

Ist das Nennerpolynom q eine Konstante ($\neq 0$), so ist die rationale Funktion r ein Polynom. Die Menge der rationalen Funktionen enthält alle Polynome. Die folgenden Aussagen folgen aus den Rechenregeln für Brüche bzw. aus Lemma 1.

Lemma 2. Summe, Produkt und Quotient rationaler Funktionen sind wieder rationale Funktionen. $\diamond$

Satz 4.3.2. Eine rationale Funktion r ist in ihrem Definitionsbereich stetig, d. h. r ist stetig in allen $x \in \mathbb{R}$ außer in den Nullstellen des Nennerpolynoms. $\diamond$

Diese Stetigkeitsaussage führt in der „Schulmathematik“ zu einigen Verwirrungen, die wir durch die folgenden Beispiele klären wollen.

Beispiel 2. Wir betrachten die rationale Funktion

$$r(x) = \frac{x^2 + x}{x + 1} = \frac{x(x+1)}{x+1},$$

deren Nennerpolynom die Nullstelle $x_0 = -1$ besitzt. Die Funktion r ist also an der Stelle $x_0 = -1$ nicht definiert und die Frage, ob r in -1 stetig ist, ist vollkommen sinnlos. Für alle $x \neq x_0$ gilt aber $r(x) = x$. Definiert man

$$r_1(x) = \begin{cases} r(x), & \text{falls } x \neq -1, \\ -1, & \text{falls } x = -1, \end{cases} \qquad \text{also } r_1(x) = x;$$

so ist diese neue Funktion überall definiert und stetig, also auch in $x_0 = -1$. Man beachte, dass es sich bei r und r_1 um zwei *verschiedene* Funktionen handelt. Man nennt $x_0 = -1$ eine *stetig behebbare Definitionslücke* von r.

Allgemeiner ist x_0 eine stetig behebbare Definitionslücke der rationalen Funktion $r = p/q$, wenn man r in der Form

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{(x - x_0)^n\, p_1(x)}{(x - x_0)^n\, q_1(x)}$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und $q_1(x_0) \neq 0$ schreiben kann. Durch die Definition

$$r_1(x) = \begin{cases} r(x), & \text{falls } x \in \text{Definitionsbereich von } r, \\ p_1(x_0)/q_1(x_0), & \text{falls } x = x_0, \end{cases}$$

wird diese Lücke an der Stelle x_0 stetig geschlossen.

Beispiel 3. Ganz anders liegt der Fall bei der Funktion

$$r(x) = \frac{x^2 + x}{x - 1} = \frac{x(x+1)}{x-1},$$

die an der Stelle $x_0 = 1$ nicht definiert ist. Da $x - 1$ das Zählerpolynom nicht teilt (man also nicht durch $x - 1$ kürzen kann), gibt es keine Möglichkeit die Definitionslücke $x_0 = 1$ stetig zu beheben. Man bezeichnet $x_0 = 1$ als *Pol* der Funktion r.

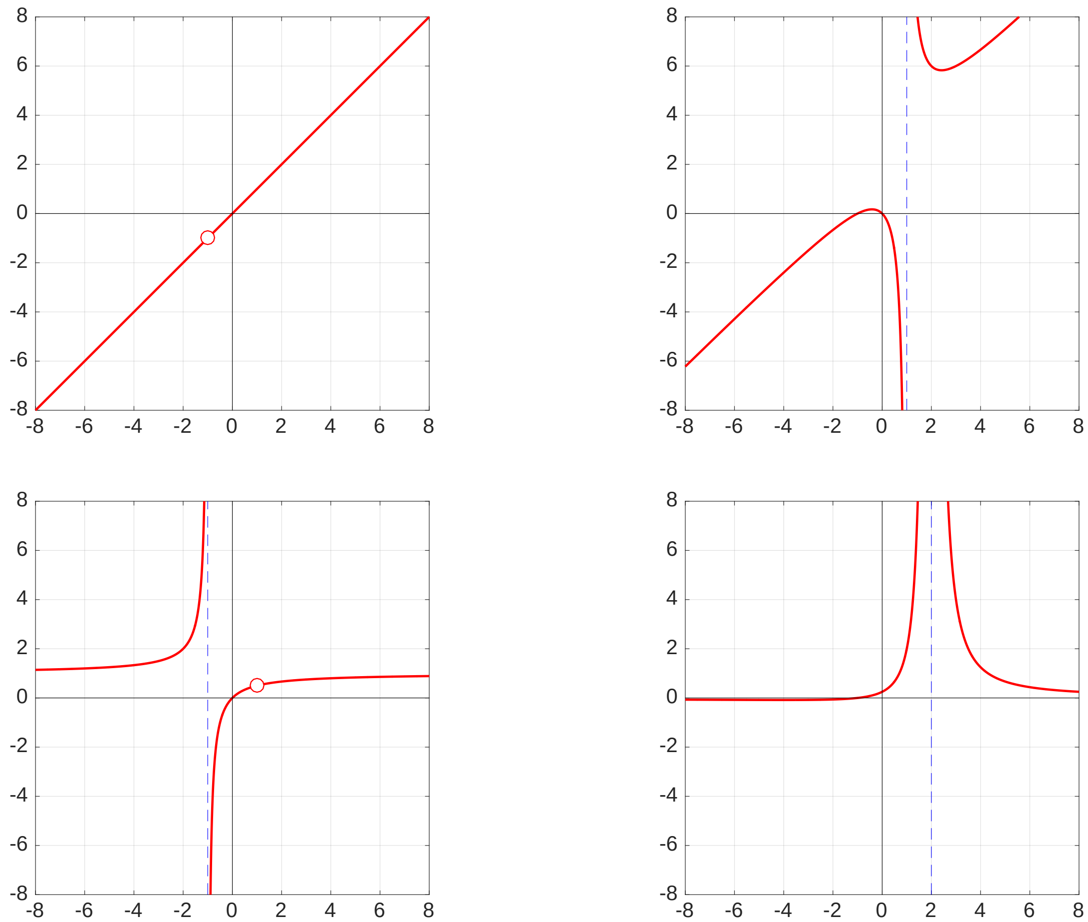
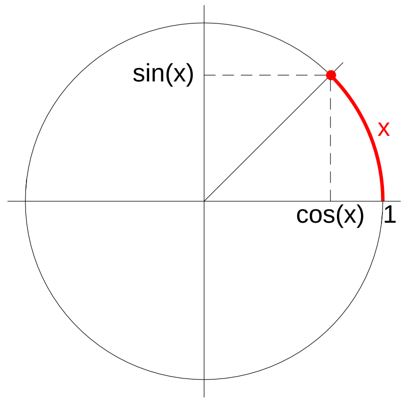


Abbildung 4.1: Graphen rationaler Funktionen. Oben links: $r(x) = \frac{x^2+x}{x+1}$ (vgl. Beispiel 2), oben rechts: $r(x) = \frac{x^2+x}{x-1}$ (vgl. Beispiel 3), unten links: $r(x) = \frac{x^2-x}{x^2-1}$, unten rechts: $r(x) = \frac{x^2-x-2}{x^3-6x^2+12x-8}$.

4.4 Einige spezielle Funktionen



Wir befassen uns mit *trigonometrischen Funktionen* (Winkelfunktionen), wobei wir Winkel prinzipiell im *Bogenmaß* messen. Ein Strahl, der ausgehend von 0 mit der positiven Abszisse den Winkel x bildet, schneidet den Einheitskreis in einem Punkt (c, s), die Länge des Bogens von $(1, 0)$ nach (c, s) — im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen — ist dann die Größe des Winkels x im Bogenmaß.
Wir definieren

$$\sin(x) := s \ (\textit{Sinus}) \quad \text{und} \quad \cos(x) := c \ (\textit{Kosinus}).$$

Offensichtlich sind diese Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und liefern Werte in $[-1, 1]$. Außerdem gilt

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Sinus- und Kosinusfunktion sind 2π-periodisch, d. h. $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$ und $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $k \in \mathbb{Z}$. Manche Werte dieser Funktionen kann man explizit angeben, z. B.

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$\sin(x)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0
$\cos(x)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	1

Die Nullstellen der Sinusfunktion sind die ganzzahligen Vielfachen von π, während die Nullstellen der Kosinusfunktion durch $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, gegeben sind. Die Sinusfunktion ist ungerade ($\sin(-x) = -\sin(x)$), d. h. ihr Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung, während die Kosinusfunktion gerade ist ($\cos(-x) = \cos(x)$), d. h. ihr Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse. Man kann beweisen, dass sowohl die Sinus- wie auch die Kosinusfunktion auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sind.

Wir definieren außerdem

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \ (\textit{Tangens}) \quad \text{und} \quad \cot(x) := \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \ (\textit{Kotangens}).$$

Tangens und Kotangens sind nur dann definiert, wenn die jeweiligen Nennerfunktionen nicht verschwinden. Der natürliche Definitionsbereich der Tangensfunktion ist also $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, der der Kotangensfunktion ist $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Beide Funktionen sind π-periodisch und auf ihren Definitionsbereichen stetig.

Eine weitere wichtige Funktionenklasse besteht aus den *Exponentialfunktionen* $x \mapsto a^x$, wobei a eine positive und x eine beliebige reelle Zahl sind. Was man unter einem Ausdruck wie $3^{\sqrt{2}}$ zu verstehen hat, ist nicht ohne weiteres klar. Wie werden a^x schrittweise „definieren“:

- Für $x = n \in \mathbb{N}$ ist
$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ Faktoren}}.$$
- Für $x = 0$ setzen wir $a^0 := 1$ und für $n \in \mathbb{N}$
$$a^{-n} := \frac{1}{a^n}.$$
Damit ist jetzt a^x für alle $a > 0$ und alle ganzzahligen x erklärt.
- Für eine rationale Zahl $x = \frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ ist
$$a^x = a^{p/q} := \sqrt[q]{a^p}.$$
Dabei bezeichnet $w = \sqrt[q]{y}$ die q-te *Wurzel* der positiven Zahl y, d. h. die eindeutig bestimmte positive Zahl w, die $w^q = y$ erfüllt. Jetzt ist a^x für alle $a > 0$ und alle rationalen Zahlen x erklärt.
- Ist $x \in \mathbb{R}$, so wählen wir eine Folge rationaler Zahlen $\{q_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{m\to\infty} q_m = x$.[6] Dann wird a^x durch
$$a^x := \lim_{m\to\infty} a^{q_m}$$
definiert[7].

Führt man alle Beweise durch, die wir weggelassen haben, so ist mit dieser Konstruktion a^x für alle $a > 0$[8] und alle reellen Zahlen x erklärt. Es gibt wesentlich elegantere Methoden, um a^x zu definieren. Sie setzen allerdings Techniken und Begriffe voraus, die uns hier nicht zur Verfügung stehen.

Satz 4.4.1. Es sei $a > 0$ eine positive reelle Zahl, dann ist die *Exponentialfunktion zur Basis a*
$$a^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto a^x,$$
eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte stetige Funktion. Der Wertebereich dieser Funktionen ist $(0, \infty)$, besteht also aus allen positiven reellen Zahlen (falls $a \neq 1$). Außerdem ist a^x für $a > 1$ streng monoton wachsend bzw. für $a < 1$ streng monoton fallend.
Es gelten die folgenden Rechenregeln (*Potenzgesetze*):
$$\begin{aligned} &a^{x+y} = a^x\, a^y, && a^0 = 1, && a^{-x} = 1/a^x, \\ &(a^x)^y = a^{x\,y}, && (ab)^x = a^x b^x, && (a/b)^x = a^x/b^x \end{aligned}$$
für $a, b, x, y \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$. ◇

[6] Man müsste beweisen, dass solche Folgen existieren!

[7] Man müsste erstens zeigen, dass dieser Grenzwert existiert, und zweitens, dass er unabhängig von der gewählten Folge $\{q_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ ist!

[8] Es ist üblich, daneben noch $a \neq 1$ zu fordern, weil $x \mapsto 1^x = 1$ uninteressant und außerdem nicht injektiv ist.

Die wichtigste Exponentialfunktion ist die zur Basis

$$e = \lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n = 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995\ldots$$

Man spricht von *der* Exponentialfunktion.

Da die Funktion $a^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für $a \neq 1$ streng monoton ist und den Wertebereich $(0, \infty)$ besitzt, existiert ihre Umkehrfunktion

$$\log_a(x) : (0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = \log_a(x),\ \text{falls } a^y = x.$$

Man nennt $\log_a(x)$ den *Logarithmus von x zur Basis a*. Die Funktion $\log_a$ ist nur für positive Argumente definiert — als Basis sind alle $a > 0$, $a \neq 1$, zugelassen. Der Logarithmus zur Basis e, also die Umkehrfunktion von $x \mapsto e^x$, wird *natürlicher Logarithmus* genannt und normalerweise einfach mit log (manchmal mit ln) bezeichnet. Daneben kann man die Bezeichnungen lg für $\log_{10}$ und ld für $\log_2$ (*Logarithmus dualis*) finden.

Satz 4.4.2. Es sei $a > 0$ eine positive reelle Zahl mit $a \neq 1$, dann ist die *Logarithmusfunktion zur Basis a*

$$\log_a : (0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \log_a(x),$$

eine stetige Bijektion zwischen $(0, \infty)$ und $\mathbb{R}$. Die Funktion $\log_a$ ist für $a > 1$ streng monoton wachsend bzw. für $a < 1$ streng monoton fallend.
Es gelten die folgenden Rechenregeln:

$$\begin{aligned} &\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y), && \log_a(1) = 0, && \log_a(1/x) = -\log(x),\\ &\log(x^z) = z\log(x), && \log_a(x) = \log_b(x)/\log_b(a) \end{aligned}$$

für $a, b, x, y, z \in \mathbb{R}$, $a, b, x, y > 0$, $a, b \neq 1$.

Beweis. Wir zeigen nur die erste und die letzte der angegebenen Regeln:
Aus $\log_a(x) = v$ folgt $a^v = x$ und aus $\log_a(y) = w$ folgt $a^w = y$. Wegen Satz 4.4.1 gilt $xy = a^v a^w = a^{v+w}$, was wiederum $\log_a(xy) = v + w$ bedeutet. Also

$$\log_a(xy) = v + w = \log_a(x) + \log_a(y).$$

Die Gleichung $\log_a(x) = y$ führt auf $a^y = x$. Wendet man $\log_b$ auf die letzte Gleichung an, so folgt $\log_b(x) = \log_b(a^y) = y \log_b(a) = \log_a(x)\log_b(a)$, was zur letzten Rechenregel äquivalent ist. ◇

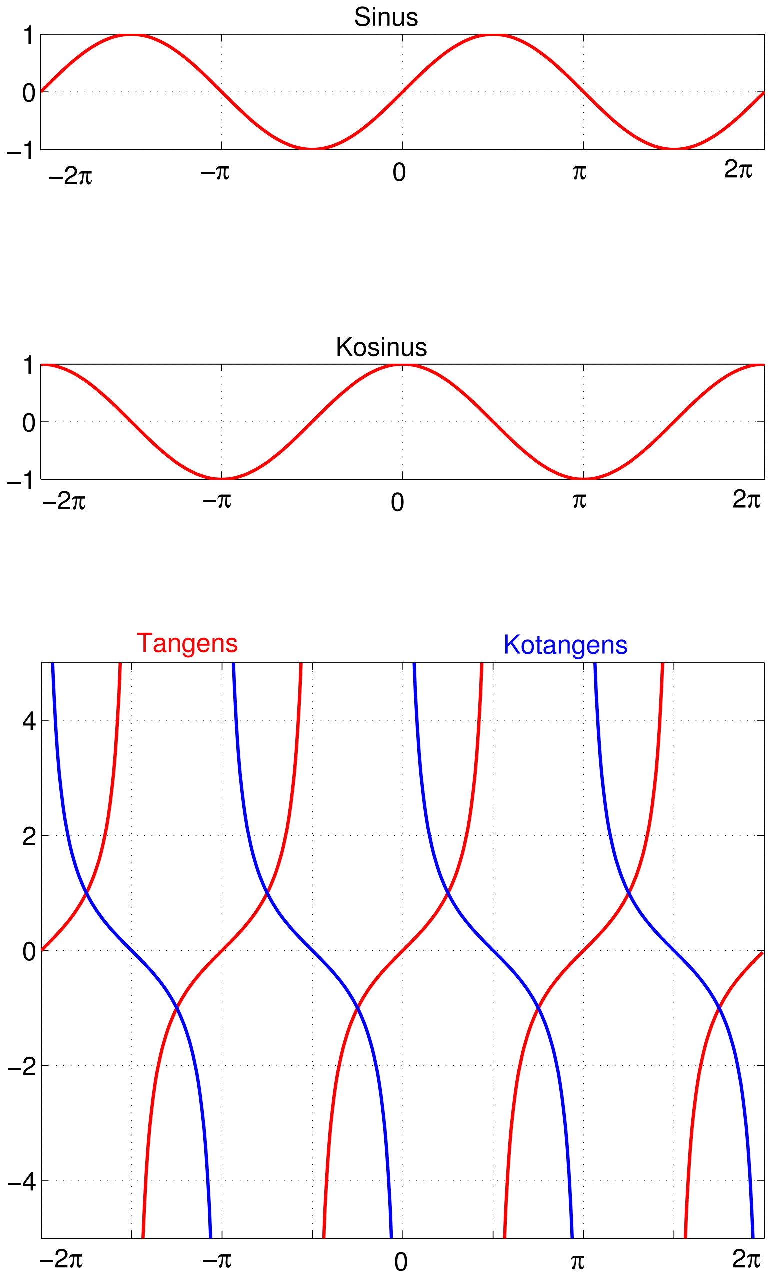


Abbildung 4.2: Graphen trigonometrischer Funktionen. Oben: sin, darunter: cos, unten: tan (—) und cot (—).

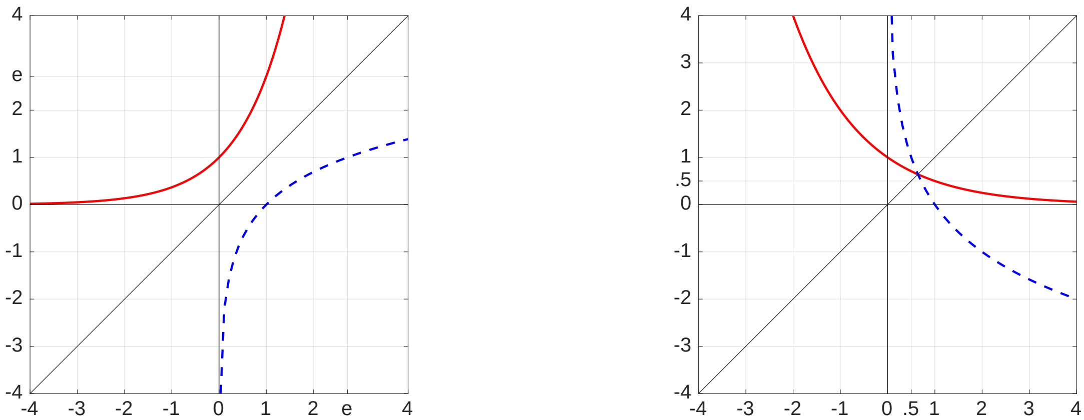


Abbildung 4.3: Graphen von Exponential- (—) und Logarithmusfunktionen (- - -): links zur Basis $e > 1$, rechts zur Basis $1/2 < 1$.