Kapitel 2

Grundlegendes der Mathematik

(Prof. Martin Schneider, Skript von Prof. Udo Hebisch)

2.1 Logik

Unter einer „Aussage“ versteht man in der Mathematik einen in einer natürlichen oder formalen Sprache formulierten Satz, für den eindeutig festgestellt werden kann, ob er in einer gewissen „realen Welt“ entweder wahr oder falsch ist. Also ist keine Aussage sowohl wahr als auch falsch! Typische Sätze (aus der „Welt der natürlichen Zahlen“) sind in natürlicher Sprache formuliert etwa

A: 2 teilt 9.

B: 3 ist eine ungerade Primzahl.

C: 6 ist eine perfekte Zahl.

D: 13 ist eine Unglückszahl.

E: Es gibt unendlich viele Primzahlen.

F: Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge.

Die Wahrheit oder Falschheit von A und B kann dabei sehr schnell bestimmt werden, sobald die in den Aussagen auftretenden Begriffe „teilt“, „ungerade“ und „Primzahl“ geklärt sind (vgl. den Anfang von Abschnitt 2.3). Dasselbe gilt für C, da auch der Begriff „perfekte Zahl“ eine exakte mathematische Bedeutung hat. Dagegen gibt es keine exakte Definition der „Glückszahl“ bzw. „Unglückszahl“ und daher wird D nicht als (mathematische) Aussage betrachtet.

Es ist aber erheblich schwieriger, die Wahrheit von E festzustellen, selbst wenn der Begriff „unendlich“ präzisiert worden ist (vgl. dazu die Sätze 2.3.4 und 2.3.5).

Schließlich wird F ebenfalls als mathematische Aussage betrachtet, obwohl bis heute noch niemand entscheiden konnte, ob dieser Satz wahr oder falsch ist.

Der *Wahrheitswert* $v(A)$ einer beliebigen Aussage A ist also entweder wahr ($v(A) = w$) oder falsch ($v(A) = f$).

Sind A und B Aussagen, so kann man beide durch *logische Junktoren* wie folgt verknüpfen

Negation	$\neg A$	gelesen: „nicht A“
Konjunktion	$A \wedge B$	gelesen: „A und B“
Disjunktion	$A \vee B$	gelesen: „A oder B“
Implikation	$A \to B$	gelesen: „aus A folgt B“
Äquivalenz	$A \leftrightarrow B$	gelesen: „A ist gleichwertig zu B“

Der Wahrheitswert der zusammengesetzten Aussage ergibt sich aus folgenden *Wahrheitswertetafeln.* Man beachte dabei, daß auch bei der Implikation und der Äquivalenz kein *inhaltlicher* Zusammenhang zwischen den Aussagen A und B bestehen muß.

$v(A)$	$v(\neg A)$
f	w
w	f

$v(A)$	$v(B)$	$v(A \wedge B)$	$v(A \vee B)$	$v(A \to B)$	$v(A \leftrightarrow B)$
f	f	f	f	w	w
f	w	f	w	w	f
w	f	f	w	f	f
w	w	w	w	w	w

Schließlich hat man für die in vielen mathematischen Aussagen auftretenden Formulierungen „für jedes x gilt“ und „es gibt ein x, für das gilt“ die beiden *Quantoren* eingeführt:

Allquantor	$\forall x$	gelesen: „für jedes x gilt“ oder „für alle x gilt“
Existenzquantor	$\exists x$	gelesen: „es gibt ein x, für das gilt“

Formalisierungen und formale Umformungen können in der Mathematik für das Finden von Beweisen hilfreich sein. Beispielsweise ist die folgende Aussage wahr:

Die Quadratwurzel aus 2, also $\sqrt{2}$, ist keine rationale Zahl.

Mit den mengentheoretischen Definitionen des nächsten Abschnitts kann man dies formelmäßig auch so ausdrücken: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ bzw. $\neg(\sqrt{2} \in \mathbb{Q})$.

Diese Schreibweise liefert zunächst noch keine Idee für einen Beweis dieser Aussage, aber man kann den Sachverhalt mit Hilfe des Existenzquantors auch etwas formaler schreiben:

$$\neg(\exists x : x \in \mathbb{Q} \wedge x = \sqrt{2}),$$

oder, wenn man das Zeichen für die Quadratwurzel durch Quadrieren auflöst:

$$\neg(\exists x : x \in \mathbb{Q} \wedge x^2 = 2),$$

Berücksichtigt man nun noch den Zusammenhang zwischen den beiden Quantoren und der Negation, so erhält man einen Ansatz für einen Beweis (zur Ausführung vgl. Satz 2.4.3):

$$\forall x : x \in \mathbb{Q} \to \neg(x^2 = 2).$$

2.2 Mengen

Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

Diese „naive“ Definition des Begriffes *Menge* wird in der Vorlesung „Lineare Algebra 1“ bald präzisiert, reicht für unsere Zwecke aber zunächst aus.

Die Objekte x einer Menge M heißen *Elemente von* M, in Zeichen: $x \in M$. Gehört ein Objekt y nicht zu der Menge M, so schreibt man kurz $y \notin M$.

Für zwei Mengen A und B schreibt man $A \subseteq B$ (gelesen: „A ist Teilmenge von B“), wenn jedes Element von A auch ein Element von B ist.

Damit hat man

$$A = B \;\leftrightarrow\; A \subseteq B \;\wedge\; B \subseteq A$$

und man definiert „A ist echte Teilmenge von B“ durch

$$A \subset B \;\leftrightarrow\; A \subseteq B \;\wedge\; A \neq B.$$

Die Beschreibung von Mengen erfolgt durch

- Aufzählen der Elemente, z. B.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\},\; B = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}.$$

- Angabe einer charakteristischen Eigenschaft der Elemente

$$B = \{x \mid x \text{ ist eine gerade ganze Zahl } > 0\},$$

$$C = \{x \mid x \in B \;\wedge\; x \text{ ist durch 3 teilbar}\} = \{6, 12, 18, \ldots\}.$$

Es bezeichnet $|M|$ die *Anzahl der Elemente von* M, also $|A| = 5, |B| = \infty$.

Sind A und B Mengen, so kann man durch die folgenden *Mengenoperationen* neue Mengen bilden.

Durchschnitt	$A \cap B = \{x \mid x \in A \;\wedge\; x \in B\}$
Vereinigung	$A \cup B = \{x \mid x \in A \;\vee\; x \in B\}$
Differenz	$A \setminus B = \{x \mid x \in A \;\wedge\; x \notin B\}$
Kartesisches Produkt	$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \;\wedge\; y \in B\}$
Potenzmenge	$\mathfrak{P}(A) = \{T \mid T \subseteq A\}$

Für bestimmte Mengen sind spezielle Symbole und Bezeichnungen üblich:

$\emptyset$	die *leere Menge*
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$	die Menge der *natürlichen Zahlen*
$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$	
$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$	die Menge der *ganzen Zahlen*
$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$	die Menge der *rationalen Zahlen*
$\mathbb{R}$	die Menge der *reellen Zahlen*, d. h. die Menge aller endlichen oder unendlichen Dezimalbrüche
$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$	die Menge der *Irrationalzahlen*

Zwei Mengen A und B mit $A \cap B = \emptyset$ nennt man *disjunkt.* Ist A Teilmenge einer Menge M, so nennt man $M \setminus A$ auch das *Komplement von A in M*. Offensichtlich sind daher A und sein Komplement $M \setminus A$ stets disjunkt. Also bilden die Irrationalzahlen gerade das Komplement der rationalen Zahlen in den reellen Zahlen.

2.3 Teilbarkeit und Primzahlen

Auf der Menge $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ der natürlichen Zahlen wird die Relation $\leq$ (gelesen: „kleiner oder gleich") definiert durch

$$m \leq n \;\leftrightarrow\; \exists k \in \mathbb{N}_0 : n = m + k$$

und die Relation $\mid$ (gelesen: „teilt") durch

$$m \mid n \;\leftrightarrow\; \exists k \in \mathbb{N}_0 : n = m \cdot k.$$

Für $m \mid n$ nennt man m einen *Teiler von n* und n *ein Vielfaches von m*. Gilt $2 \mid n$, so heißt n *gerade*, andernfalls *ungerade*. Ein Teiler $m \neq n$ von n heißt *echter Teiler*.

Für $m \leq n$ mit $m \neq n$ schreibt man auch $m < n$ (gelesen: „m [ist] echt kleiner [als] n"). Außerdem dreht man $m \leq n$ auch gelegentlich um zu $n \geq m$ und liest dann „n [ist] größer oder gleich m". Entsprechend liest man $n > m$ als „n [ist] echt größer [als] m".

Definition 2.3.1. Eine natürliche Zahl $n > 1$ heißt eine *Primzahl*, wenn n nur die Teiler 1 und n besitzt, andernfalls nennt man n zusammengesetzt. Die Menge aller Primzahlen werde mit $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, \ldots\}$ bezeichnet.

Definition 2.3.2. Für natürliche Zahlen a und b nennt man die natürliche Zahl d einen *größten gemeinsamen Teiler von a und b* (geschrieben: $d = ggT(a, b)$), wenn die folgenden Bedingungen gelten

1. $d \mid a \;\wedge\; d \mid b$,

2. $t \mid a \;\wedge\; t \mid b \;\rightarrow\; t \mid d$.

Für $ggT(a, b) = 1$ heißen a und b *teilerfremd.*

Satz 2.3.3. Jede natürliche Zahl $n > 1$ besitzt einen kleinsten Teiler $d > 1$. Dieser ist stets eine Primzahl.

Beweis: Jedenfalls ist $d = n > 1$ ein Teiler von n und daher die Menge T aller Teiler $d > 1$ von n nicht leer. Ist $d \in T$, so gilt $n = d \cdot m$ für eine natürliche Zahl m. Daher ist $d = \frac{n}{m} \leq n$. Da es nur endlich viele natürliche Zahlen gibt, die kleiner oder gleich n sind, ist die Menge $T \neq \emptyset$ endlich und besitzt damit ein kleinstes Element d.

Jede natürliche Zahl k mit $1 < k < d$ ist also kein Teiler von n und daher auch nicht von d, da ein Teiler von d immer auch schon ein Teiler von n ist. Also ist d eine Primzahl. $\diamond$

Satz 2.3.4. (Euklid) Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Um den hier noch sehr unpräzisen Begriff „unendlich“ zu vermeiden, kann man den gemeinten Inhalt des Satzes auch folgendermaßen ausdrücken:

Satz 2.3.5. Ist $P = \{p_1, \ldots, p_k\}$ eine beliebige endliche Menge von Primzahlen, dann gibt es eine Primzahl $p \in \mathbb{P}$ mit $p \notin P$.

Beweis: Betrachte zu P die Zahl $n = 1 + \prod_{i=1}^{k} p_i > 1$. Dann besitzt n einen kleinsten Primteiler p. Wäre $p = p_i \in P$, dann wäre p als Teiler von n und von $\prod_{i=1}^{k} p_i$ auch ein Teiler der Differenz $1 = n - \prod_{i=1}^{k} p_i$, was für eine Primzahl unmöglich ist. Also gilt $p \notin P$. $\diamond$

Auch der folgende Satz geht auf Euklid zurück.

Satz 2.3.6. (Division mit Rest) Zu natürlichen Zahlen a und $b \neq 0$ existieren stets eindeutig bestimmte natürliche Zahlen q und r mit $a = qb + r$ und $0 \leq r < b$.

Beweis: Wegen $b > 0$ kann man die natürlichen Zahlen in halboffene Intervalle $[kb, (k+1)b)$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$ einteilen. Diese Intervalle haben die Länge b, sind paarweise disjunkt und überdecken $\mathbb{N}_0$ vollständig. In genau einem dieser Intervalle $[qb, qb + b)$ liegt also a. Dann erfüllt $r = a - qb \in \mathbb{N}_0$ aber $r < b$ und $a = qb + r$. Außerdem bestimmt a die linke Intervallgrenze und damit q eindeutig und r ist als Differenz $a - qb$ dann ebenfalls eindeutig bestimmt. $\diamond$

Satz 2.3.7. (Euklidischer Algorithmus) Es seien a und $b \neq 0$ natürliche Zahlen. Führt man iteriert Divisionen mit Rest gemäß dem folgenden Schema aus, so bricht das Verfahren nach endlich vielen Schritten ab, weil die letzte Division aufgeht. Der letzte Rest $r_n \neq 0$ ist der größte gemeinsame Teiler von a und b.

$$
\begin{aligned}
a &= q_1 b + r_1 \\
b &= q_2 r_1 + r_2 \\
r_1 &= q_3 r_2 + r_3 \\
&\cdots \\
r_{n-2} &= q_n r_{n-1} + r_n \\
r_{n-1} &= q_{n+1} r_n
\end{aligned}
$$

Beweis: Für die Divisionsreste gilt $b > r_1 > r_2 > \ldots > r_n \geq 0$, das Verfahren muß also nach spätestens b Schritten abbrechen. Aus der letzten Gleichung liest man $r_n \mid r_{n-1}$ (und wegen $r_n < r_{n-1}$ auch $q_{n+1} > 1$) ab, dann aus der vorletzten Gleichung $r_n \mid r_{n-2}$ usw. Aus der zweiten Gleichung ergibt sich schließlich $r_n \mid b$ und aus der ersten $r_n \mid a$. Also ist r_n gemeinsamer Teiler von a und b.

Löst man die ersten n Gleichungen nach den jeweiligen Divisionsresten auf, so erhält man

$$\begin{aligned}
r_1 &= a - q_1 b \\
r_2 &= b - q_2 r_1 \\
r_3 &= r_1 - q_3 r_2 \\
&\ldots \\
r_n &= r_{n-2} - q_n r_{n-1}
\end{aligned}$$

Ist nun t ein gemeinsamer Teiler von a und b, so folgt aus der ersten Gleichung $t \mid r_1$, dann aus der zweiten $t \mid r_2$ usw. Aus der letzten Gleichung erhält man schließlich $t \mid r_n$. Dies zeigt $r_n = ggT(a, b)$. ◇

2.4 Beweistechniken

2.4.1 Der direkte Beweis

Bei dieser Methode wird eine Aussage durch eine Kette von Implikationen aus einer oder mehreren Voraussetzungen abgeleitet.

Satz 2.4.1. Zu jeder natürlichen Zahl $n > 1$ existieren endlich viele Primzahlen $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_m$ mit

$$n = \prod_{i=1}^{m} p_i. \tag{2.1}$$

Faßt man gleiche Faktoren jeweils zu einer Potenz zusammen, so existieren also stets endlich viele Primzahlen $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ und Exponenten $\alpha_i \geq 1$ für $i = 1, \ldots, k$ mit

$$n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}. \tag{2.2}$$

Beweis: Nach Satz 2.3.3 existiert eine Primzahl p_1 mit $n = p_1 \cdot n_1$ und $n_1 < n$. Im Fall $n_1 = 1$ ist die Aussage für $m = 1$ bewiesen. Sonst besitzt n_1 einen kleinsten Primteiler p_2 mit $n_1 = p_2 \cdot n_2$ und $n_2 < n_1 < n$. Wegen $n = p_1 n_1 = p_1 p_2 n_2$ ist p_2 auch Primteiler von n und es gilt daher $p_1 \leq p_2$. Im Fall $n_2 = 1$ ist die Aussage für $m = 2$ bewiesen. Sonst kann man fortfahren und erhält auf diese Weise eine Folge von Primteilern $p_1 \leq p_2 \leq p_3 \ldots$ von n und natürlichen Zahlen $n > n_1 > n_2 > \ldots$. Diese muß spätestens nach n Schritten abbrechen und man erhält so ein $n_m = 1$ und die behauptete Zerlegung (2.1).

Die Behauptung über (2.2) ist dann klar. $\diamond$

Man nennt (2.2) die *Primfaktorzerlegung von* n und kann zeigen, daß die darin auftretenden Primzahlen p_i bis auf ihre Reihenfolge eindeutig bestimmt sind. Ebenso ist der jeweilige Exponent α_i von p_i eindeutig bestimmt.

2.4.2 Der Beweis durch Kontraposition

Hierbei ist eine Implikation der Form $A \to B$ zu beweisen, d. h. aus der Voraussetzung A ist die Behauptung B herzuleiten. Da diese Implikation gleichwertig zu der Implikation $\neg B \to \neg A$ ist, wie die entsprechende Wahrheitswertetafel zeigt, kann man auch aus der Voraussetzung $\neg B$ die Behauptung $\neg A$ durch direkten Beweis herleiten.

Satz 2.4.2. Ist das Quadrat n^2 einer natürlichen Zahl n gerade, dann ist n selbst gerade.

Beweis: Der Beweis wird durch Kontraposition geführt. Es ist also für die Aussagen $A =$ „n^2 ist gerade“ und $B =$ „n ist gerade“ die Implikation $A \to B$ zu zeigen. Daher kann auch $\neg B \to \neg A$ bewiesen werden.

Dabei ist die Negation $\neg A$ die Aussage „n^2 ist ungerade“ und die Negation $\neg B$ die Aussage „n ist ungerade“.

Sei also n ungerade, d. h. $n = 2k + 1$ für eine natürliche Zahl k. Hieraus folgt $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2) + 1 = 2k' + 1$ mit der natürlichen Zahl $k' = 2k^2 + 2$. Also ist auch n^2 ungerade.

Damit ist $\neg B \to \neg A$ und dazu gleichwertig $A \to B$ bewiesen. $\diamond$

Naheliegende Fragen: Gilt die Aussage auch für höhere Potenzen n^k mit $k = 3, 4, \ldots$? Gilt die Aussage auch für andere Teiler $d = 3, 4, 5, \ldots$ von n?

2.4.3 Der Widerspruchsbeweis

Diese Beweistechnik beruht darauf, daß eine Aussage A genau dann wahr ist, wenn ihre Negation $\neg A$ falsch ist. Man zeigt nun, daß $\neg A$ falsch ist, indem man aus der Annahme von $\neg A$ einen Widerspruch zu irgend einer anderen schon als wahr bewiesenen Aussage B herleitet.

Satz 2.4.3. Die reelle Zahl $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.

Beweis: Der Beweis wird als Widerspruchsbeweis geführt. Dazu nimmt man an, $\sqrt{2}$ sei doch eine rationale Zahl, also $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ mit natürlichen Zahlen $m, n \neq 0$, wobei m und n teilerfremd seien, was man durch Kürzen des größten gemeinsamen Teilers immer erreichen kann.

Es gelte also $n\sqrt{2} = m$ mit natürlichen, teilerfremden Zahlen m und n. Durch Quadrieren erhält man $2n^2 = m^2$. Also ist m^2 und damit nach Satz 2.4.2 auch m gerade, also $m = 2k$ für eine natürliche Zahl k. Es folgt $2n^2 = 4k^2$ und daher $n^2 = 2k^2$. Also ist auch n^2 und damit n gerade. Dies widerspricht der Teilerfremdheit von m und n. Daher kann es keine solche Zahlen m und n geben und $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl. $\diamond$.

Naheliegende Fragen: Gilt die Aussage auch für andere natürliche Zahlen n anstelle von $n = 2$? Welche reellen Zahlen sind mit $\sqrt{2}$ noch irrational?

2.4.4 Der Beweis durch vollständige Fallunterscheidung

Diese Methode kann dann angewandt werden, wenn eine Aussage über mathematische Objekte bewiesen werden soll, die sich in verschiedene Klassen einteilen lassen. Man führt dann den Beweis für jede Klasse einzeln. Dabei kann man jeweils zusätzliche Eigenschaften verwenden, die alle Objekte in der betreffenden Klasse haben.

Satz 2.4.4. Zu jeder Primzahl $p > 2$ gibt es eine natürliche Zahl k, so daß $p = 4k + 1$ oder $p = 4k + 3$ gilt.

Beweis: Der Beweis erfolgt durch Fallunterscheidung nach den (eindeutig bestimmten) möglichen Resten r, die p bei der Division mit Rest durch 4 besitzen kann. Es gilt also $p = k \cdot 4 + r$ mit natürlichen Zahlen k und r sowie $0 \leq r < 4$.

1. Fall: $r = 0$. Dann würde bei Division durch 4 also $p = k \cdot 4$ gelten und die Primzahl p wäre durch 4 teilbar. Da dies nicht sein kann, tritt dieser Fall niemals ein.

2. Fall: $r = 1$. Dann gilt bei Division durch 4 also $p = k \cdot 4 + 1$ und eine natürliche Zahl k wie im Satz behauptet ist gefunden.

3. Fall: $r = 2$. Dann würde bei Division durch 4 also $p = k \cdot 4 + 2 = 2(2k + 1)$ gelten und die Primzahl $p > 2$ wäre durch 2 teilbar. Da dies nicht sein kann, tritt dieser Fall ebenfalls nicht ein.

4. Fall: $r = 3$. Dann gilt bei Division durch 4 also $p = k \cdot 4 + 3$ und eine natürliche Zahl k wie im Satz behauptet ist gefunden.

Es bleiben also für eine Primzahl $p > 2$ nur zwei mögliche Fälle und in jedem von ihnen ist die Aussage des Satzes wahr.

Naheliegende Frage: Welche Darstellungen haben ungerade Primzahlen bei anderen geraden natürlichen Zahlen m anstelle von $m = 4$? $\diamond$

2.4.5 Der Beweis durch vollständige Induktion

Diese Methode kann für den Beweis von Aussagen verwendet werden, die sich auf natürliche Zahlen beziehen. Sie beruht auf dem folgenden *Induktionsprinzip* für natürliche Zahlen:

Zu beweisen ist eine Aussage $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen n (oder für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$, wobei n_0 eine bestimmte natürliche Zahl ist).

Zunächst wird als *Induktionsbeginn* die Aussage $A(n_0)$ für eine möglichst kleine natürliche Zahl n_0 gezeigt, meistens $n_0 = 0$ oder $n_0 = 1$.

Dann wird die Implikation $A(n) \to A(n+1)$ für jede natürliche Zahl $n \geq n_0$ bewiesen. Dabei setzt man also voraus, daß $A(n)$ für eine beliebige natürliche Zahl $n \geq n_0$ wahr ist und folgert hieraus durch einen direkten Beweis, daß dann auch $A(n+1)$ wahr sein muß. Diesen Teil des Beweises nennt man den *Induktionsschritt*.

Damit kann man die Wahrheit von $A(n)$ für jede beliebige natürliche Zahl $n \geq n_0$ durch die folgende Schlußkette begründen: Zunächst gilt ja nach dem Induktionsbeginn $A(n_0)$. Hieraus folgt mit dem Induktionsschritt auch die Gültigkeit von $A(n_0+1)$. Nochmalige Anwendung des Induktionsschrittes liefert die Gültigkeit von $A(n_0+2)$. Durch $(n-n_0)$-malige Anwendung des Induktionsschrittes gelangt man damit zur Gültigkeit von $A(n)$. Man beachte, daß für jedes konkrete $n \geq n_0$ die benötigte Schlußkette endlich ist.

Satz 2.4.5. Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ gilt

$$2^n < \binom{2n}{n}. \tag{2.3}$$

Beweis: Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion über n. Für $n = 2$ gilt

$$\binom{2\cdot 2}{2} = \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2} = 6 > 4 = 2^2.$$

Gelte also (2.3) für ein $n \geq 2$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\binom{2(n+1)}{n+1} &= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!\cdot(n+1)!} \\
&= \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^2 n!n!} \\
&= \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)^2}\binom{2n}{n} \\
&> \frac{2n+1}{n+1}\cdot 2\cdot 2^n \\
&\geq 2^{n+1}.
\end{aligned}$$

Dabei wurde im vorletzten Schritt die Voraussetzung der Gültigkeit von (2.3) für dieses $n \geq 2$ ausgenutzt und im letzten Schritt die Ungleichung $2n+1 \geq n+1$ für alle natürlichen Zahlen n. Damit ist der Schluß von n auf $n+1$ gezeigt und aus dem Induktionsprinzip folgt nun die Behauptung für jedes $n \geq 2$. ◇

2.5 Übungsaufgaben

(M. Sc. Maximilian Geißer)

1. Zeigen Sie mittels einer Wahrheitswerttabelle, dass es sich bei dem folgend gegebenen Ausdruck für beliebige Aussagen x und y um eine Tautologie (d.h. eine wahre Aussage) handelt:

   $$\big((x \to y) \land (\neg y)\big) \to (\neg x).$$

2. Formalisieren Sie die Aussagen

   Es gibt eine Menge, deren Potenzmenge höchstens so viele Elemente wie sie selbst besitzt.
   Das Quadrat des Nachfolgers jeder ungeraden natürlichen Zahl ist durch 4 teilbar.

   und negieren Sie diese anschließend.

3. Beweisen Sie die Gültigkeit der folgenden Rechenregeln für beliebige Mengen A, B, C und D:

   $$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D),$$
   $$A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C).$$

4. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:

   $$47 \,|\, 7^{2n} - 2^n.$$

5. Zeigen Sie mittels eines Widerspruchsbeweises, dass für nichtnegative reelle Zahlen a und b stets die folgende Ungleichung gilt:

   $$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

6. Zeigen Sie mittels eines direkten Beweises, dass die Summe aus dem Produkt von vier aufeinander folgenden ungeraden ganzen Zahlen und der Zahl 16 eine Quadratzahl ist.