

Kapitel 0

Was ist Mathematik?

(Prof. K. Gerald van den Boogaart)

0.1 Mathematik

- Axiome, Definitionen und was aus ihnen folgt.
- Mathematik ist wahr, trifft aber nur „wenn, dann“ Aussagen.
- Es gibt keine allgemeingültige Definition der Mathematik.
- Mathematik = griechisch für Lernen.
- Wird Mathematik entdeckt oder entwickelt?
- Mathematik ist die einfachste aller Wissenschaften, da sie bisher als einzige in der Lage war, Beweise für ihre Aussagen beizubringen.
- Mathematik ist die schwierigste Wissenschaft, da jeder etwas wirklich neues beizubringen hat.

0.1.1 Reine Mathematik

- Nur wahre Aussagen, nur innermathematisch.
- Alles, was man mit reiner Logik erreichen kann.
- Zitat: Mathematik ist ein Glassperlenspiel (schön, komplex, von inneren Gesetzen getrieben, man interagiert mit dem Spiel, ...).
- Was kann man mit reiner Logik erreichen?

0.1.2 Angewandte Mathematik

- Entwickelt Methoden für große Klassen realer Aufgaben.
 - Numerik / Wissenschaftliches Rechnen.
 - Optimierung.
 - Stochastik.
 - * Wahrscheinlichkeitstheorie.
 - * Statistik.
 - * Stochastische Prozesse.
 - Mathematische Modellierung.

Dabei werden alle Register der reinen Mathematik gezogen.

0.2 Mathematik im Kontext

0.2.1 Mathematik und Philosophie

- Mathematik und Philosophie haben sich anfangs zusammen entwickelt.
- Mathematik als die reinste Philosophie.
- Logik als gemeinsames Fachgebiet.
- WITGENSTEIN, Principia Mathematica.

0.2.2 Theoretische Physik

- Gemeinsame Entwicklung.
- Feldtheorie, Riemannsche Geometrie, Potentialtheorie, Gruppentheorie, . . .

0.2.3 Informatik

- Komplexitätstheorie.
- Berechenbarkeitstheorie.
- Datenstrukturen = mathematische Strukturen, z.B. relationale Datenbanken.
- Korrektheitsbeweise.

0.2.4 Versicherungsmathematik

- Wie hoch sind die Risiken? Wie hoch müssen die Beiträge sein?
- Wie entwickelt sich ein Portfolio an Verträgen?
- Wie rückversichert man unkontrollierte Risiken?

0.2.5 Wirtschaftsmathematik

- Wie wirtschaftet man am besten?
- Wie gestaltet man ein Portfolio, um für die Zukunft gerüstet zu sein?
- Wie misst man Erfolg? Wie garantiert man ihn?
- Wie verwandelt man Marktdaten in Handlungen?

0.2.6 Ingenieurmathematik

- Wie modelliert, simuliert und optimiert man technische Systeme?
- Auch technische Systeme brauchen Logik. Wie sollte sie sein?
- Wie stellt man Sicherheit her?

0.2.7 Mathematische Geowissenschaften

- Wie verstehen wir einen Ball, an dessen Oberfläche wir nur kratzen können?
- Wie funktioniert die Erde?
- Wie kann der Mensch die Erde nutzen und bewahren?

0.2.8 Biomathematik

- Wie funktioniert das Leben?
- Wie wird das Ökosystem reagieren?

0.2.9 Statistik

- Wir machen aus Daten Wissen.
- Wirkt das Medikament? Ist es sicher?
- Warum kaufen, wählen, sterben, ...?

0.2.10 Öffentliche Statistik

- Wie quantifiziert man die Welt?
- Welche Information ist relevant?
- Wie quantifiziert man Nachhaltigkeit?

0.3 Fachgebiete

Beispiele für Fragen

- Grundlagen der Mathematik
 - Wie funktioniert die Logik?
 - Kann man alle wahren Sätze beweisen?
 - Welche Aussagen könnten wahr sein, müssen aber nicht? Und wann?
 - Gibt es NP-vollständige Probleme, wenn ja für welche Klassen von Rechnern?
 - Wir hinterfragen, was Du für selbstverständlich hältst.
- Algebra
 - Wie löst man $x^3 + 2x + 7 = 0$?
 - Wie rechnet man mit Abbildungen, Gesetzen oder Kategorien?
 - Wie rechnet man ohne Zahlen?
 - Was du mit Zahlen kannst, machen wir mit Allem.
 - $e^{i\pi} + 1 = 0$
- Analysis
 - Ableitungen, Integrale, Folgen und ihre Gesetze.
 - Was ist die Lösung von $f'(x) = F(f(x))$?
 - Was du mit Zahlen kannst, können wir z.B. mit dem Schwerfeld der Erde.

- Diskrete Mathematik
 - Die Gesetze des Endlichen? Nichts ist so schwer wie die Mathematik des Einfachen.
 - Wieviel Farben braucht man, um eine Landkarte zu färben.
 - Wie geht man damit um, wenn man einfach nichts rechnen kann.
- Geometrie
 - Wir verstehen den Raum.
 - Aber leider ist der Raum niemals so flach wie in der Schule.
 - Wir verstehen ihn trotzdem.
- Numerik
 - Computer rechnen immer falsch.
 - Wie kann man trotzdem etwas berechnen, z.B. den Flug einer Marsrakete, den Explosionsverlauf in einem neuen energiesparenden Motor, das Innere eines Körpers aus elektromagnetischen Felddaten oder das Klima im Jahr 2100.
 - Wie rechnet man schnell, richtig und genau?
- Optimierung
 - Wie findet man die beste Lösung für ein Aufgabe?
 - Wie, wenn man nicht alle Lösungen benutzen darf?
 - Wie, wenn es jemanden gibt, der gegen einen arbeitet?
 - Wie, wenn man noch nicht alles weiß?
- Stochastik
 - Was wird wahrscheinlich passieren?
 - Was können wir aus unseren Beobachtungen schließen?
 - Wie geht man mit Dingen um, die jedes Mal anders sind?
 - Wie entscheidet man sich richtig, wenn man noch nicht genug weiß?
 - Du weißt noch nichts, aber wir können trotzdem Antworten.

0.4 Was sind mathematische Fähigkeiten?

Die folgende Definition verwendet die PISA Studie (First Results from Pisa 2003, Executive Summary):

1. At Level 1 students can answer questions involving familiar contexts where all relevant information is present and the questions are clearly defined. They are able to identify information and to carry out routine procedures according to direct instructions in explicit situations. They can perform actions that are obvious and follow immediately from the given stimuli.

Beispiel: Was ist $23 \cdot 16$?

2. At Level 2 students can interpret and recognise situations in contexts that require no more than direct inference. They can extract relevant information from a single source and make use of a single representational mode. Students at this level can employ basic algorithms, formulae, procedures, or conventions. They are capable of direct reasoning and making literal interpretations of the results.

Beispiel: Ein rechteckiges Gebiet ist 23 m lang und 16 m breit. Hat es mehr als 1000 m^2 ?

3. At Level 3 students can execute clearly described procedures, including those that require sequential decisions. They can select and apply simple problem-solving strategies. Students at this level can interpret and use representations based on different information sources and reason directly from them. They can develop short communications reporting their interpretations, results and reasoning.

Beispiel: Es stehen mehrere Grundstücke zum Verkauf: Eines ist 23 m lang und 16 m breit, ein zweites 30 m lang und 10 m breit und ein drittes 100 m lang und 5 m breit. Welches der Grundstücke ist das größte und warum?

4. At Level 4 students can work effectively with explicit models for complex concrete situations that may involve constraints or call for making assumptions. They can select and integrate different representations, including symbolic ones, linking them directly to aspects of real-world situations. Students at this level can utilise well-developed skills and reason flexibly, with some insight, in these contexts. They can construct and communicate explanations and arguments based on their interpretations, arguments and actions.

Beispiel: Mehrere Grundstück stehen zum Verkauf. Informationen zu den Grundstücken finden sie in der vorherigen Aufgaben. Die Grundstücke kosten 50.000 \$, 45000 \$ und 40.000 \$. Kommentieren und begründen Sie, welches Sie mir empfehlen würden.

5. At Level 5 students can develop and work with models for complex situations, identifying constraints and specifying assumptions. They can select, compare, and evaluate appropriate problem-solving strategies for dealing with complex problems related to these models. Students at this level can work strategically using broad, well-developed thinking and reasoning skills, appropriately linked representations, symbolic and formal characterisations, and insight pertaining to these situations. They can reflect on their actions and formulate and communicate their interpretations and reasoning.

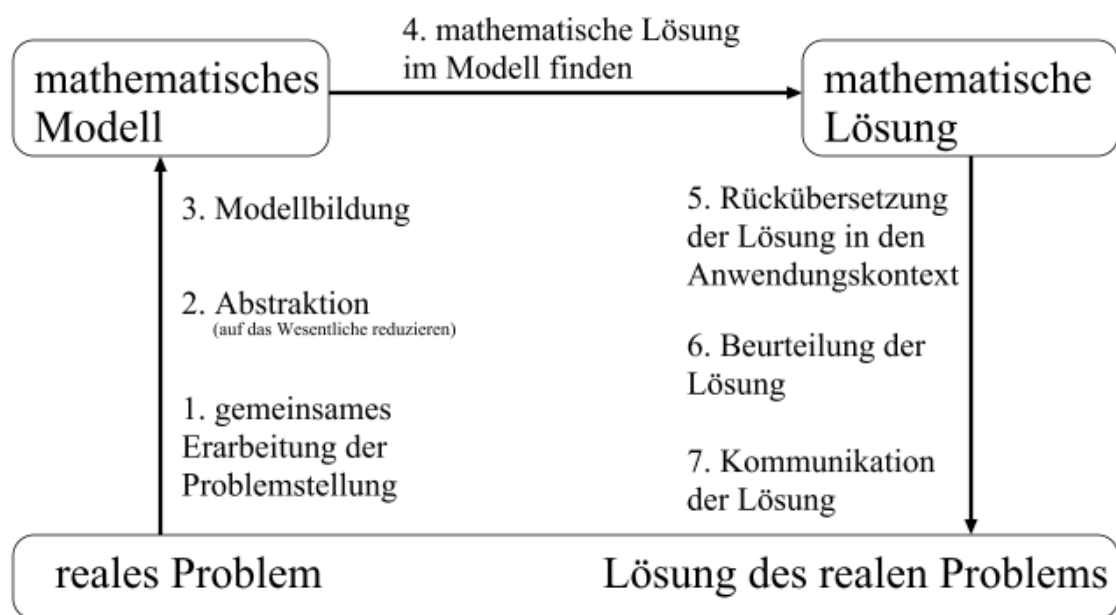
Beispiel: Wie sollte man die Grundstücke, die derzeit in Freiberg auf dem Markt sind, bewerten?

6. At Level 6 students can conceptualise, generalise, and utilise information based on their investigations and modelling of complex problem situations. They can link different information sources and representations and flexibly translate among them. Students at this level are capable of advanced mathematical thinking and reasoning. These students can

apply insight and understanding along with a mastery of symbolic and formal mathematical operations and relationships to develop new approaches and strategies for dealing with novel situations. Students at this level can formulate and precisely communicate their actions and reflections regarding their findings, interpretations, arguments and the appropriateness of these to the original situations.

Beispiel: Was sind die derzeit wichtigsten Herausforderungen des Freiburger Grundstücksmarkts. Erstellen Sie eine begründete Handlungsempfehlung für den Stadtrat.

0.5 Mathematische Problemlösung



0.6 Der Mathematiker als Beruf

0.6.1 Mathematik in der technischen Industrie

0.6.2 Mathematik in Versicherungen: Die Ausbildung zum Aktuar

0.6.3 Mathematiker in der Informatik

0.6.4 Mathematiker in der Pharmaindustrie

0.6.5 Mathematiker in Unternehmensberatungen

0.6.6 Mathematik in anderen Wissenschaften

0.6.7 Mathematiker in Führungspositionen

0.6.8 Mathematiker im öffentlichen Dienst

0.6.9 Mathematiker in mathematischen Fachbereichen

0.7 Mathematik in Freiberg

- Institut für Angewandte Analysis
 - Herr Prof. Waurick, Partielle Differentialgleichungen
 - Herr Prof. Hielscher, Signal- und Bildverarbeitung
 - Herr Prof. Reissig, Partielle Differentialgleichungen
 - Frau Prof. Bernstein, Harmonische Analysis und ihre Anwendungen
- Institut für diskrete Mathematik und Algebra
 - Herr Prof. Schiermeyer, Angewandte Diskrete Mathematik
 - Herr Prof. Schneider, Angewandte Algebra
 - Herr Prof. Sonntag, Mathematische Grundlagen der Informatik
- Institut für Numerische Mathematik und Optimierung
 - Herr Prof. Aland, Numerische Mathematik

- Herr Prof. Rheinbach, Hochleistungsrechnen in der Kontinuumsmechanik
- Herr Prof. Dempe, Mathematische Optimierung
- Institut für Stochastik
 - Herr Prof. Starkloff, Stochastik
 - Herr Prof. van den Boogaart, Angewandte Stochastik
 - Herr Vertretungsprofessor Ballani, Angewandte Stochastik
- Herr Juniorprofessor Sprungk, Angewandte Mathematik
- Institut für Informatik
 - Herr Prof. Froitzheim, Betriebssysteme und Kommunikationstechnologie
 - Herr Prof. Jasper, Künstliche Intelligenz und Datenbanken
 - Herr Prof. Zug, Softwaretechnologie und Robotik
 - Herr Prof. Jung, Virtuelle Realität und Multimedia