Aufgaben zur Vor- und Nachbereitung für naturwissenschaftliche Studiengänge

Zahlenfolgen und Zahlenreihen

1) Untersuchen Sie die Zahlenfolgen $\{a_n\}, n \in N$ auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz und ermitteln Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

a) $a_n = \dfrac{2n+1}{n}$ b) $a_n = \dfrac{2n}{n^2+1}$ c) $a_n = \frac{1}{2}((a-b)+(-1)^n(a-b))$ d) $a_n = 1 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.

2) a) Gegeben ist eine reelle Zahlenfolge $\{a_n\}_{n\in N}$ mit $1 \le a_n \le 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$ für alle $n \in N$.
Konvergiert diese Folge? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.
b) Gegeben ist eine reelle Zahlenfolge $\{b_n\}_{n\in N}$ mit $1 \le |b_n| \le 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$ für alle $n \in N$.
Konvergiert diese Folge? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.
c) Gegeben ist eine reelle Zahlenfolge $\{c_n\}_{n\in N}$ mit $c_n^2 + 2c_n \le -1 + \frac{1}{n}$ für alle $n \in N$.
Konvergiert diese Folge? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

3) a) Gibt es eine beschränkte Folge $\{a_n\}_{n\in N}$ positiver reeller Zahlen, die *nicht* konvergiert?
b) Gibt es eine Nullfolge $\{b_n\}_{n\in N}$ positiver reeller Zahlen, die nicht monoton fällt?
c) Gibt es eine Nullfolge $\{c_n\}_{n\in N}$ positiver reeller Zahlen, die *nicht* beschränkt ist?
d) Gibt es eine monoton fallende Folge $\{d_n\}_{n\in N}$ pos. reeller Zahlen, die *nicht* konvergiert?
Hinweis: Geben Sie in jeder der vier Teilaufgaben entweder eine Folge an, die die gewünschte Eigenschaft besitzt (mit Begründung), oder zeigen Sie mit Hilfe von Sätzen der Vorlesung, dass keine Folge mit den gewünschten Eigenschaften existiert.

4) Berechnen Sie den Grenzwert g der Zahlenfolge $\{a_n\}$, $n \in N$ und bestimmen Sie danach ein $N = N(\varepsilon)$ derart, dass $|a_n - g| < \varepsilon$ für alle $n > N(\varepsilon)$ gilt.

a) $a_n = \frac{n-1}{n+1}$ b) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10}$.

5) Untersuchen sie die nachstehend durch ihr allgemeines Glied gegebenen Zahlenfolgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

a) $a_n = -2 + 0{,}5n$, $b_n = -2 + (-1)^n 0{,}5n$, $c_n = -2 + 0{,}5^n$, $d_n = -2 + (-0{,}5)^n$

b) $a_n = \dfrac{n+(-1)^n}{2n}$, $b_n = (-1)^n \dfrac{3n^2-3}{2(n-3)^2}$, $c_n = (-1)^n\left(\frac{1}{n} - (-1)^{n+1}\right)$

c) $a_n = \sqrt{n^2+1} - n$, $b_n = \dfrac{1}{2n}(3\sqrt{n}-1)^2$, $c_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-2}$

d) $a_n = \dfrac{3^n + 6^n}{3^n + 6^{n+1}}$, $b_n = \dfrac{3^n + (-3)^n}{2^{2n}}$, $c_n = \dfrac{3^n + (-3)^n}{3^{n+1}}$

e) $a_n = \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^{100}$, $b_n = \left(1 + \dfrac{3}{n}\right)^{2n}$, $c_n = \left(1 - \dfrac{1}{3n}\right)^{2n}$, $d_n = \left(1 + \dfrac{4}{n-1}\right)^{n+4}$

6) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Folge $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ mit $a_n = \frac{n^2}{2^n}$, folgern Sie die Existenz von $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ und bestimmen Sie A durch Diskussion von $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}$.
Wie lautet das größte Glied der Folge?

7) Schreiben Sie mit Summenzeichen und berechnen Sie unter Verwendung der Formeln für endliche arithmetische Reihen bzw. geometrische Reihen:
a) $(37^3 - 36^3) + (35^3 - 34^3) + \ldots + (3^3 - 2^3) + 1 - 3(36^2 + 34^2 + \ldots + 2^2)$,
b) Summe aller ungeraden Zahlen von 7 bis 213,
c) $3^{-37} - 3^{-36} + 3^{-35} - 3^{-34} + \ldots + 3^{-3} - 3^{-2} + 3(2^{36} + 2^{34} + \ldots + 2^2)$
d) $3 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \frac{16}{27} + \frac{32}{81} + \ldots\ldots$

8) Für welche $a \in R$ ist die Zahlenreihe $2 - \frac{2}{a} + \frac{2}{a^2} - \frac{2}{a^3} + \frac{2}{a^4} - \ldots.$ konvergent? Geben Sie für den Fall der Konvergenz den Grenzwert in Abhängigkeit von a an.

9) Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der unendlichen Reihen unter Verwendung geeigneter Konvergenzkriterien:
a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}$ $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$ $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{n}\right)^n$ $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$
b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ $\quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{4n+1}}$ $\quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$
c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ $\quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3+n^2}$ $\quad \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n(n^2-1)}}$ $\quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^4+2}}$
d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{1+2^n}$

10) Berechnen Sie die Reihensummen: a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ $\quad$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+2}}{3^{2n-1}}$ $\quad$ c) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-k}$

12) Man bestimmen alle x-Werte, für die folgende Reihe konvergiert: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left\{\frac{(2x-\pi)^k}{k(k+1)}\right\}$.