Lösungen zum Übungsblatt Zahlenfolgen und Zahlenreihen

für Naturwissenschaftler (HM1)

Aufgabe 1

a) $a_n = 2 + \frac{1}{n} < 2 + \frac{1}{n+1} = a_{n+1}$, Folge ist streng monoton fallend.

Wegen $2 < a_n < 3$, für alle n ist die Folge beschränkt und damit auch konvergent: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

b) wegen $a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)}{(n+1)^2+1} - \frac{2n}{n^2+1} = -2\frac{n^2+n-1}{((n+1)^2+1)(n^2+1)} < 0$, für alle n ist die Folge str. mon.fallend.

Wegen $0 < a_n \leq 1$ ist die Folge beschränkt und damit konvergent: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = 0.$

c) $a_n = 0$ für n ungerade und $a_n = a - b$ für n gerade. Für a = b liegt eine Nullfolge vor.
Für $a \neq b$ ist die Folge beschränkt, aber nicht monoton und nicht konvergent.

d) Die Folge ist nicht monoton, wegen $\frac{1}{2} \leq a_n \leq 2$ jedoch beschränkt.

Sie ist konvergent: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, da beide Teilfolgen (für gerade und ungerade n) gegen 1 konvergieren

Aufgabe 2

a) a_n hat untere Schranke $s = 1$ und obere Schranke $S = 1$ (da $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 1$) also $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

b) für $b_n > 0$: das gleiche Ergebnis wie bei a) also $\lim\limits_{n\to\infty} b_n^+ = 1$,

für $b_n < 0$: ist $1 \leq -b_n \leq 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$ also $-1-\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq b_n \leq -1$ also $\lim\limits_{n\to\infty} b_n^- = -1$ somit ist b_n div.

c) nach Zus.-fassung $(c_n + 1)^2 \leq \frac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ also auch $\lim\limits_{n\to\infty} (c_n + 1)^2 = 0$ also $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = -1$.

Aufgabe 3

a) ja, z.B. $a_n = 2 + (-1)^n$ ist beschränkt ($1 \leq a_n \leq 3$), aber nicht konvergent ($a_{2m} = 3, a_{2m+1} = 1$)

b) ja, z.B. die Folge $\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots$ (Bild.-gesetz: $a_{2m+1} = 1/(m+1)$, $a_{2m} = 1/(m+2)$, $m \in N_0$) ist offenbar positiv, nicht monoton, sowie eine Nullfolge

c) nein, denn jede konvergente Folge ist beschränkt (Satz 3.3)

d) nein, denn eine monoton fallende Folge positiver reeller Zahlen ist beschränkt (durch 0 nach unten, durch das erste Folgenglied nach oben) also nach Satz 3.3 konvergent,

Aufgabe 4

a) $g = 1$, $N = \left(\frac{2}{\varepsilon}\right) - 1$ b) $g = 1$, $N = \left((1+\varepsilon)^{1/10} - 1\right)^{-1}$

Aufgabe 5

a) $a_n \to \infty$, $b_{2k-1} = -2 - 0{,}5(2k-1) \to -\infty$, $b_{2k} = -2 + 0{,}5(2k) \to +\infty$, b_n unbest. divergent

$c_n = -2 + 0{,}5^n \to -2$ und auch $d_n = -2 + (-0{,}5)^n \to -2$

b) $a_n \to 1/2$ $b_{2k-1} \to -\frac{3}{2}$ $b_{2k} \to \frac{3}{2}$ also b_n unbest. divergent , $c_n = (-1)^n \frac{1}{n} + 1 \to 1$

c) $a_n = \left(\sqrt{n^2+1} - n\right)\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n} \to 0$, $b_n = \frac{9n - 6\sqrt{n}+1}{2n} = \frac{9}{2} - \frac{3}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n} \to \frac{9}{2}$

$c_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-2} = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-2}\right)\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-2}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-2}} = \frac{3}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-2}} \to 0$

d) $a_n = \dfrac{6^n\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1\right)}{6^n\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + 6\right)} \to \dfrac{1}{6}$, $\quad b_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \left(1 + (-1)^n\right) \to 0$

$c_n = \left(\frac{1}{3}\right)\left(1 + (-1)^n\right) \to 0,\ c_{2k-1} = 0,\ \ c_{2k} = \frac{2}{3}$ also unbestimmt divergent

e) $a_n \to 1$, $\ b_n = \left(\left(1 + \frac{3}{n}\right)^n\right)^2 \to \left(e^3\right)^2 = e^6$, $\ c_n \to e^{-\frac{2}{3}}$, $d_n = \left(1 + \frac{4}{n-1}\right)^{n-1}\left(1 + \frac{4}{n-1}\right)^5 \to e^4$.

Aufgabe 6

Bis n = 3 steigend, für n >3 fallend, da $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = c_n$ ist $a_{n+1} = c_n \cdot a_n$

$$A = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} c_n \cdot a_n = \lim_{n\to\infty} c_n \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{2}\left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^2 \lim_{n\to\infty} a_n = \tfrac{1}{2} \lim_{n\to\infty} a_n = \tfrac{1}{2} A$$

$A = \frac{1}{2}A \Rightarrow \frac{1}{2}A = 0 \Rightarrow A = 0$ Maximales Glied $a_n : a_3 = \frac{9}{8}$

Aufgabe 7

a) $\sum_{n=1}^{18} (2n+1)^3 - (2n)^3 + 1 - 3\sum_{n=1}^{18}(2n)^2 = 1 + \sum_{n=1}^{18}(6n+1) = 1045$

b) $\sum_{n=1}^{104}(2n+5) = 11\,440$

c) $\sum_{k=1}^{36}(-1)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} + 3\sum_{k=1}^{18}(2)^{2k} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{36}\left(-\frac{1}{3}\right)^k + 3\sum_{k=1}^{18}4^k = -\frac{49}{12} + 4^{19} + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{3}\right)^{36} \approx 4^{19}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{n-1}}{3^{n-2}} = \frac{9}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{9}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{2}{3}} = 9$

Aufgabe 8 $\quad |a| > 1, \quad S = \frac{2a}{a-1}$

Aufgabe 9

a) QK: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$: $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{n+1}{3^{n+1}}\cdot\dfrac{3^n}{n} = \dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \to \dfrac{1}{3} < 1$, Reihe konvergent

QK: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}$: $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{3^{n+1}}{n+1}\cdot\dfrac{n}{3^n} = 3\left(\dfrac{n}{n+1}\right) \to 3 > 1$, Reihe divergent, (auch notw. Kriterium nicht erfüllt)

QK: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$: $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\dfrac{n^n}{3^n n!} = 3\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = 3\left(\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n \to \dfrac{3}{e} > 1$, divergente Reihe

WK: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{n}\right)^n$: $\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{n}\right) \to \frac{1}{2} < 1$, Reihe konvergent

WK: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$: $\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{3}e < 1$, Reihe konvergent

b) LK: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$: $\quad |a_n| = \dfrac{1}{\ln n} \to 0$, $|a_n| = \dfrac{1}{\ln n} > \dfrac{1}{\ln(n+1)} = |a_{n+1}|$, Reihe ist konvergent

LK: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{4n+1}}: |a_n| = \frac{1}{\sqrt{4n+1}} \to 0$, $|a_n| = \frac{1}{\sqrt{4n+1}} > \frac{1}{\sqrt{4n+5}} = |a_{n+1}|$, Reihe ist konvergent

LK : $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{n+1} : |a_n| = \frac{n}{n+1} \to 1 \neq 0$, Reihe divergent

c) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$: QK: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\ln n}{\ln(n+1)} = \frac{\ln n}{\ln(n(1+\frac{1}{n}))} = \frac{\ln n}{\ln n + \ln(1+\frac{1}{n})} = \left(\frac{1}{1+\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}}\right) \to 1,$

keine Aussage. Notwendige Konvergenzbedingung $a_n \to 0$ ist erfüllt.

MK: Es gilt $\ln(n) < n \Rightarrow \frac{1}{\ln(n)} > \frac{1}{n}$ also ist $\sum \frac{1}{n}$ div. Minorante für $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$: $\Rightarrow$ Reihe divergent

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{3+n^2}$: QK liefert keine Aussage $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to 1$, MK: $\frac{1}{n^2} > \frac{1}{3+n^2}$ also ist $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergente

Majorante für $2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3+n^2} \Rightarrow$ Reihe ist konvergent

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n(n^2-1)}}$: $\sqrt[3]{(n^3-n)} < \sqrt[3]{n^3} = n \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{n^3-n}} > \frac{1}{n}$ also ist $\sum \frac{1}{n}$ div. Minorante für $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n(n^2-1)}}$
$\Rightarrow$ Reihe divergent

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^4+2}}$:MK: $\sqrt[3]{n^4+2} > \sqrt[3]{n^4} = n^{\frac{4}{3}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{n^4+2}} < \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$, $\sum \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ ist konvergent, also ist $\sum \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$

konvergente Majorante für $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^4+2}} \Rightarrow$ Reihe ist konvergent

d) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{1+2^n}$ QK: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 2\frac{1+2^n}{1+2^{n+1}} = 2\frac{(\frac{1}{2^n}+1)}{(\frac{1}{2^n}+2)} \to 2\cdot\frac{1}{2} = 1$, nicht entscheidbar; jedoch gilt

$a_n = \frac{2^n}{1+2^n} = \frac{1}{\frac{1}{2^n}+1} \to 1$, notw. Konvergenzbedingung. nicht erfüllt $\Rightarrow$ Divergenz der Reihe

Aufgabe 10

a) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} = 1$

b) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k+2}}{3^{2k-1}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}12\left(\frac{2}{9}\right)^k = \lim_{n\to\infty}\frac{24}{9}\cdot\frac{1-\left(\frac{2}{9}\right)^n}{1-\left(\frac{2}{9}\right)} = \frac{24}{7}$

c) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2-k} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-k} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-1)k} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$

$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1$

Aufgabe 11

Setze $t = 2x - \pi$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k(k+1)}$, QK: $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{\frac{|t^{k+1}|}{(k+1)(k+2)}}{\frac{|t^k|}{k(k+1)}} = |t| \frac{k(k+1)}{(k+1)(k+2)} \to |t|$,

Für $|t| < 1$ konvergiert die Reihe, für $|t| > 1$ divergiert die Reihe.
Untersuchung für

$t = 1: \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k}$, da $\frac{1}{k^2+k} < \frac{1}{k^2}$ ist $\sum \frac{1}{k^2}$ konvergente Majorante $\Rightarrow$ Reihe ist konvergent

$t = -1: \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$, LK: $|a_k| = \frac{1}{k(k+1)} \to 0$ und ist offensichtlich streng mon. fallend $\Rightarrow$ Reihe konv.

Somit Reihenkonvergenz für $-1 \le t \le 1$ also für $-1 \le (2x - \pi) \le 1$ also $\frac{1}{2}(\pi - 1) \le x \le \frac{1}{2}(\pi + 1)$.