Vor- und Nachbereitungsaufgaben für naturwissenschaftliche Studiengänge

Rechnen mit Matrizen, Determinanten, Inverse Matrizen

1) Berechnen Sie für

$$A=\begin{pmatrix}2&4&0\\1&2&3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0&5\\2&-1&3\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&0&4\end{pmatrix} \quad \text{den Term} \quad 2A+3B-4C.$$

2) Gegeben sind $A=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $B=(3;-1;2)$, $C=\begin{pmatrix}2&0&5\\1&3&4\end{pmatrix}$.

Prüfen Sie, welche der folgenden Matrizen A, A^T, B, B^T, C, C^T miteinander verkettet sind. Führen Sie in diesem Fall die Multiplikation aus und geben Sie den Typ der Produkte an.

3) Berechnen Sie für die Matrizen $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&2&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$ und $B=\begin{pmatrix}1&1&-2\\-2&0&0\\0&1&3\end{pmatrix}$

die Produkte $A\cdot B, B\cdot A, A\cdot B^T, B\cdot A^T, A^T\cdot B^T$.

4) Welchen Rang, Defekt, Nullraum und Bildraum haben die Matrizen

$$A_1=\begin{pmatrix}2&3\\4&1\\0&2\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}2&3\\6&9\end{pmatrix},\ A_3=\begin{pmatrix}1&-2&7\\2&1&4\\3&4&1\end{pmatrix},\ A_4=\begin{pmatrix}1&0&2\\3&2&-1\\0&-1&3\end{pmatrix}$$

$$A_5=\begin{pmatrix}3&0&-2&5\\0&2&7&-1\\6&6&17&7\end{pmatrix},\ A_6=\begin{pmatrix}2&1&2&-1&4\\3&7&0&-1&5\\1&2&-3&-1&-4\\1&-8&12&0&15\end{pmatrix}?$$

5) Gegeben ist die Matrizengleichung $B\cdot C^T - X^T = 2A$. Berechnen Sie X für

$$A=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&0\\6&-12\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&-1&3\\-1&2&-5\\3&6&1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&2&-3\\4&0&1\end{pmatrix}.$$

6) Berechnen Sie (möglichst vorteilhaft) folgende Determinanten :

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix}3&-4&2\\7&5&11\\-6&8&-4\end{vmatrix} \qquad \text{b)}\ \begin{vmatrix}1&1&0&0\\1&2&1&0\\0&1&3&1\\0&0&1&4\end{vmatrix} \qquad \text{c)}\ \begin{vmatrix}5&-1&0&2\\0&-1&1&0\\0&0&2&0\\0&0&0&6\end{vmatrix}.$$

7) Berechnen Sie die 4-reihige Determinante: $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

8) Für welche $\lambda-$Werte sind folgende Determinanten gleich Null:

a) $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 4 & 3+\lambda \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 4+\lambda & -2 & 3 \\ 0 & 4+\lambda & 2 \\ 4 & 0 & 4+\lambda \end{vmatrix}$?

9) Berechnen Sie die Determinante $D = |a_{ik}|$ mit $a_{ik} = \begin{cases} i+k\ ;\ i > k \\ i-k\ ;\ i \le k \end{cases}$

für $1 \le i \le 4$; $1 \le k \le 4$.

10) Bestimmen Sie $\begin{vmatrix} -1 & 0 & b & a \\ 0 & 1 & a & -b \\ a & b & 0 & 1 \\ -b & a & -1 & 0 \end{vmatrix}$ mit $a, b \in R$.

11) Prüfen Sie, ob folgende Matrizen regulär/invertierbar sind, und berechnen Sie gegebenenfalls die inverse Matrix.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$, c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

12) Gegeben sei die Matrizengleichung $A \cdot X^T \cdot B^{-1} = C$.

a) Lösen Sie die Matrizengleichung nach X auf (die Voraussetzungen für die Auflösbarkeit sollen erfüllt sein).

b) Berechnen Sie X für $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

13) Für die Matrizen A, B, C, X gelte die Gleichung $A^T XB = C$, wobei A und B regulär seien.

a) Stellen Sie die Gleichung nach X um.

b) Wieviele Zeilen und Spalten müssen A und B besitzen, damit die Gleichung für $C \in R^{(5\times3)}$ sinnvoll wird?

c) Berechnen Sie X für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.