

## Aufgaben zur Vor- und Nachbereitung für naturwissenschaftliche Studiengänge

### Integration und Anwendungen

Alle Integrale sind mittels Rückführung auf Grundintegrale zu bestimmen, d.h. ein Abschreiben der Stammfunktion aus irgendeiner Formelsammlung ist nicht Sinn und Ziel dieser Aufgaben.

1) Bestimmen Sie die Menge aller Stammfunktionen :

a)  $f(x) = e^{1-2x}$

b)  $f(x) = 1 - 2x + \cos \frac{x}{2}$

c)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

d)  $f(x) = (2^x)^2$

e)  $f(x) = x - \cosh(x-1)$

f)  $f(x) = \left(\frac{1-x}{x}\right)^2$

g)  $f(x) = \frac{2}{\sin^2 x} + \frac{\sin x}{2}$

h)  $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$

i)  $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$

2) Bestimmen Sie folgende unbestimmten Integrale mit einer geeigneten Substitution:

a)  $\int \frac{dx}{x^2 + 4}$

b)  $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

c)  $\int \frac{x}{x^2 + 2} dx$

d)  $\int \frac{e^x}{e^x + 2} dx$

e)  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2}{\tan x \cos^2 x} dx$

f)  $\int_0^1 2xe^{3x^2} dx$

g)  $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{2e^{2x^3}} dx$

h)  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$

i)  $\int \cos^3 x dx$

j)  $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$

k)  $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx$

l)  $\int \frac{dx}{x[1 + \ln(2x)]}$

3) Nach einer Partialbruchzerlegung des Integranden bestimme man:

a)  $\int \frac{x^4 + 6x^2 - x - 1}{x^3 - x^2 + 4x - 4} dx$

b)  $\int_0^1 \frac{4x+1}{x^2 - x - 2} dx$

c)  $\int \frac{x^3 + 8x + 4}{x^2 + 4x + 4} dx$

d)  $\int \frac{x}{x^3 + 1} dx$

e)  $\int_{-1}^0 \frac{dx}{(x^2 - 2x + 1)(x^2 + 1)}$

f)  $\int \frac{x^3 - 1}{4x^3 + x} dx$

4) Unter Verwendung der partiellen Integration bestimme man:

a)  $\int xe^{-2x} dx$

b)  $\int (2-x) \sin(2-x) dx$

c)  $\int x^2 \ln x dx$

d)  $\int x(\ln x)^2 dx$

e)  $\int_0^1 x^2 \sinh(2x) dx$

f)  $\int_0^1 x \ln(x^2 + 1) dx$

g)  $\int_0^{1-e} \ln(1-x) dx$

h)  $\int_1^e \frac{\ln x}{2x^2} dx$

i)  $\int \arcsin x dx$

j)  $\int e^{-x} \cos x dx$

k)  $\int x^2 \arctan x dx$

l)  $\int \sin x \sinh x dx$

5) Informieren Sie sich in Ihrer Formelsammlung, welche Integrale nicht elementar integrierbar sind, also keine Stammfunktion für die Funktion existiert und entscheiden Sie, welche von den hier angegebenen Integralen keine Stammfunktion besitzt.

Für die anderen Integrale geben Sie die zu verwendende Integrationsmethode an:

a)  $\int x^2 e^{-x} dx$    b)  $\int x e^{-x^2} dx$    c)  $\int e^{-x^2} dx$    d)  $\int \frac{e^x}{x} dx$    e)  $\int \frac{x}{e^x} dx$

f)  $\int \frac{\sin x}{x} dx$    g)  $\int x \sin x dx$    h)  $\int x \sin(x^2) dx$    i)  $\int \sin^2 x dx$    j)  $\int x^2 \sin x dx$

k)\*  $\int \frac{1}{\sin x} dx$    l)\*  $\int \frac{x}{\sin x} dx$    m)  $\int x \ln x dx$    n)  $\int \ln x dx$    o)  $\int \frac{dx}{\ln x}$

p)  $\int \frac{\ln x}{x} dx$    q)  $\int \frac{x}{\ln x} dx$    r)  $\int x^2 \ln x dx$    s)  $\int \frac{dx}{x \ln x}$

6)\* Bestimmen Sie Stammfunktionen, entscheiden Sie selbst, welche Integrationsmethode(n) zu verwenden sind:

a)  $\int e^{\sqrt{x}} dx$    b)  $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$    c)  $\int \frac{\cos x}{1-\cos^2 x} dx$    d)  $\int x \ln(x^2) dx$

e)  $\int \frac{e^{3x}}{e^x + 1} dx$    f)  $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$    g)  $\int \frac{dx}{e^{2x} - 2e^x} dx$    h)  $\int \sin(\ln x) dx$

7) Berechnen Sie den von  $y = 2\sqrt{x}$  und  $y = \sqrt{1-x}$  eingeschlossenen Flächeninhalt.

8) Die Fläche unter der Kurve  $y = e^{\frac{1}{2}x}$  zwischen  $x = 0$  und  $x = 3$  soll durch eine Senkrechte zur  $x$ - Achse halbiert werden.  
An welcher Stelle schneidet diese die  $x$ - Achse?

9) Man berechne das Volumen eines Rotationskörpers, der durch Rotation einer Parabel 3. Ordnung um die  $x$ - Achse im Intervall  $[0;4]$  entsteht. Die Parabel soll die Punkte  $P_0(0;1), P_1(1;\frac{3}{2}), P_3(2;3)$  enthalten und an der Stelle  $x = 2$  den Anstieg 1 haben.

10) Wie groß ist die Fläche zwischen dem Graphen von  $f(x) = \frac{\cos x}{\sin^3 x + \cos^3 x}$ , der  $x$ - Achse und den Geraden  $x = 0$  und  $x = \frac{\pi}{4}$ ?

11) Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn die Kurve  $f(x) = 2xe^x$  für  $0 \leq x \leq 1$  um die  $x$ -Achse rotiert.

12) Für welche  $\alpha \in \mathbb{R}$  ist  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$  konvergent bzw. divergent?

13) Bestimmen Sie im Falle der Existenz den Wert der folgenden uneigentlichen Integrale:

a)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$    b)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\cosh^2 x}$    c)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}$    d)  $\int_0^{\infty} \cos(nx) dx$    e)  $\int_3^{\infty} \frac{x^2 + 3}{x^2(x^2 - 1)} dx$

14) Bestimmen Sie im Falle der Existenz den Wert der folgenden uneigentlichen Integrale:

a)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x dx$    b)  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$    c)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 - \sin x} dx$    d)  $\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$    e)  $\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}$