

Aufgaben zur Vor- und Nachbereitung für naturwissenschaftliche Studiengänge

Funktionsbegriff, Grenzwerte, Stetigkeit für Funktionen einer Variablen

- 1) Begründen Sie, dass $f = \left\{ (x, y) : e^y = \frac{1}{|x|}; x, y \in \mathbb{R}; x \neq 0 \right\}$ eine Funktion darstellt.
Geben Sie D_f und W_f an. Existiert auf D_f eine Umkehrfunktion f^{-1} (ist f eine bijektive Funktion)?
- 2) Ermitteln Sie Definitions- und Wertebereich der Funktion. Untersuchen Sie die Funktion auf Beschränktheit: $f(x) = \sqrt{\ln(4x - x^2)}$.
- 3) Bestimmen Sie folgende Grenzwerte (falls sie existieren) unter Verwendung elementarer Umformungen!
 - a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 3x^4}{5x^3 - 3x^5}$
 - b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10}$
 - c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4 - 4x^3 + 1}{(x-1)^2}$
 - d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}$
 - e) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$
 - f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - x^2 + 1}{x - 1}$
 - g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - x^4}{x^2 + 1}$
 - h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - x^2}{3x^2 + 1}$
- 4) Bestimmen Sie folgende Grenzwerte unter Verwendung von $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$:
 - a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x+1}\right)^{2x}$
 - b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$
- 5) Bestimmen Sie folgende einseitigen Grenzwerte (falls sie existieren):
 - a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} 3^{\tan 2x}$
 - b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 - e^x}$
 - c) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 - e^x}$.
- 6) Untersuchen Sie die Funktion $y = f(x) = \frac{x+3}{x^2-9}$ in ihrem maximalen Definitionsbereich auf Stetigkeit.
- 7) Ermitteln Sie die Unstetigkeitsstellen folgender Funktionen und beschreiben Sie die Art der Unstetigkeit unter Verwendung der einseitigen Grenzwerte dort:
 - a) $f(x) = \frac{1}{1 + 2^{1/x}}$
 - b) $f(x) = \frac{1}{\ln(1 + x^2)}$.