Lösungen zum Übungsblatt Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen einer Variablen für Naturwissenschaftler (HM1)

Aufgabe 1

Angenommen f ist keine Funktion, dann existieren $(x_1, y_1) \in f$ und $(x_1, y_2) \in f$ mit $y_1 \neq y_2$ und es muss gelten $e^{y_1} = \frac{1}{|x_1|}$ und auch $e^{y_2} = \frac{1}{|x_1|}$ und somit $y_1 = y_2$ im Widerspruch zur Annahme, folglich ist f eine Funktion. Es gilt $D_f = R \setminus \{0\}$ und $W_f = R$, und die Umkehrabbildung ist keine Funktion, denn z.B. gilt $(0;1) \in f^{-1}$ und auch $(0;-1) \in f^{-1}$.

Aufgabe 2

$D_f = \left(2-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$, $W_f = \left(0;\sqrt{\ln 4}\right)$, f ist beschränkt

Aufgabe 3

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3(4-3x)}{x^3(5-3x^2)} = \frac{4}{5}$ b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-5)} = \frac{1}{3}$ c) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)^2(3x^2+2x+1)}{(x-1)^2} = 6$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x-1} \overset{\text{Polynomdiv.}}{=} \lim\limits_{x\to 1}(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1) = n$ e) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{-(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)} = -1$

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^3-x^2+1}{x-1} = \infty$ g) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-x^4}{x^2+1} = -\infty$ h) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-x^2}{3x^2+1} = -\frac{1}{3}$

Aufgabe 4

a) $f(x) = \left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{2x} = \left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{2x+2}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{-2} = \left(\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{x+1}\right)^2\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{-2}$, also $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) =$

$\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{x+1}\right)^2 \cdot \lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{-2} = \left(e^{-2}\right)^2 \cdot 1 = e^{-4}$

b) $\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1} = \left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{x+1} = \left(1+\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right)^{x+\frac{1}{2}} \cdot \left(1+\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$, also $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1} = e$

Aufgabe 5

a) $\tan(2x) \to -\infty$ wenn $x \to \frac{\pi}{4}, x > \frac{\pi}{4}$, also $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}+} 3^{\tan 2x} = 0$

b) für $x > 0$ ist $1-e^x < 0$, also $1-e^x \to 0-$ wenn $x \to 0+$, also $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{1-e^x} = -\infty$

c) für $x < 0$ ist $1-e^x > 0$, also $1-e^x \to 0+$ wenn $x \to 0-$, also $\lim\limits_{x\to 0-} \frac{1}{1-e^x} = \infty$

Aufgabe 6

$f(x) = \frac{x+3}{(x+3)(x-3)}$ ist für $x = 3$ und $x = -3$ nicht definiert und für alle $x \neq \pm 3$ gilt $f(x) = \frac{1}{x-3}$, d.h. $f(x)$ ist stetig für alle $x \in R \setminus \{-3,3\}$, Polstelle bei $x = 3$ und Lücke bei $x = -3$

Aufgabe 7

a) $f(x)$ ist unstetig an der Stelle $x = 0$, da $f(0)$ nicht existiert. Wegen $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{1+2^{1/x}} = 0$ und $\lim\limits_{x\to 0-} \frac{1}{1+2^{1/x}} = 1$, hat $f(x)$ an der Stelle $x = 0$ eine Sprungstelle

b) $f(x)$ ist unstetig in $x = 0$, da $f(0)$ nicht existiert. Wegen $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{\ln(1+x^2)} = \lim\limits_{x\to 0-} \frac{1}{\ln(1+x^2)} = \infty$ hat $f(x)$ an der Stelle $x = 0$ eine Polstelle.