Lösungen zum Übungsblatt Differentialrechnung

für Funktionen einer Variablen für Naturwissenschaftler (HM1)

Aufgabe 1

rechtsseitige Ableitung: $f'_+(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, $f'_+(0) = \infty$ und ebenfalls ist die linksseitige Ableitung $f'_-(0) = \infty$, also besitzt *f* in $x = 0$ eine uneigentliche Ableitung.

Aufgabe 2

Aus der Stetigkeitsuntersuchung folgt: $a = \frac{9}{2}$. Für $a = \frac{9}{2}$ ist *f* auch in $x = 3$ differenzierbar.

Aufgabe 3

a) $x_0 = 0$: *f* ist weder stetig noch differenzierbar in x_0 ($f(0)$ ist nicht definiert).

b) Stetigkeit in $x_1 = 2$: $f(2) = \lim\limits_{x \to 2-} f(x) = \frac{b}{2}$, $\lim\limits_{x \to 2+} f(x) = 1 \Rightarrow b = 2$.

Differenzierbarkeit in $x_1 = 2$: $f'_+(2) = a$ $f'_-(2) = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$.

Aufgabe 4

a) $y' = a^x x^{a-1}(x \ln a + a)$ b) $y' = -\dfrac{a}{\sqrt{x}(a+\sqrt{x})^2}$ c) $y' = -\dfrac{\arccos x + \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}\,(\arcsin x)^2}$

d) $y' = \dfrac{x^2(\cosh^2 x - \sinh^2 x)}{(x\cosh x - \sinh x)^2} = \dfrac{x^2}{(x\cosh x - \sinh x)^2}$

Aufgabe 5

$y = e^{\ln(1-\sin^2 x)} = 1 - \sin^2 x = \cos^2 x$, $y' = -2\cos x \sin x = -\sin(2x)$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$

Aufgabe 6

Für $f(x) \equiv c$ gilt: $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x}} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} + \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$$

Unter Verwendung der Wurzelgesetze und binomischer Formeln erhält man

$$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} = 0$$

Aufgabe 7

Bedingung für Parallelität: $f'(x_0) = h'(x_0)$,

also $2x_0 + 1 = \dfrac{2x_0}{x_0^2 + 1} \Rightarrow x_0 = 1$, $f(-1) = 0$, $h(-1) = \ln 2$

Tangentengleichungen: $y_1 = -x - 1$ an $f(x)$

$y_2 = -x + \ln 2 - 1$ für $h(x)$

Aufgabe 8

a) Nach Anwendung der Regel von l'Hospital, da vom Typ "$\frac{0}{0}$" :

$$g = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin(a+x)\cos(a+x)}{2(a+x)} = \frac{\sin(2a)}{2a}, \text{ für } a \neq 0$$

b) Unbestimmter Ausdruck vom Typ “$\frac{\infty}{\infty}$“, direkte zweimalige Anwendung der Regel von l’ Hospital:

$$g = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3ae^{ax}}{2+3e^{ax}}}{7} = \frac{1}{7}a$$

c) Unbestimmter Ausdruck der Form “$0\cdot\infty$ “; die Anwendung der l’Hospitalschen Regel erfordert die Darstellung der Funktion als Quotient unter Verwendung der 3. binomischen Formel und es folgt:

$$g = \lim_{x\to a+} \frac{\ln(x-a)}{\frac{1}{a-x}} = -\lim_{x\to a+}(a-x) = 0$$

d) “$0\cdot\infty$ “, $g = \lim_{x\to\infty} \frac{\tan\frac{a}{2^x}}{2^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(1+\tan^2\frac{a}{2^x})(-a\cdot 2^{-x}\ln 2)}{-2^{-x}\ln 2} = a$

e) Unbestimmter Ausdruck “$\infty-\infty$“. Durch Bildung des Hauptnenners stellt man die Funktion in Form <u>eines</u> Quotienten dar:

$$g = \lim_{x\to 1} \frac{(x\ln x-1)(x-1)-(x-2)\ln x}{(x-1)\ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{(4x-2)\ln x+4x-5}{2+\ln x} = -\frac{1}{2}$$

f) Unbestimmter Ausdruck der Form “∞^0 “

$$a = \ln g = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{\ln x}\cdot\ln\left(\frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0+} \frac{-\ln(\sin x)}{\ln x} = \lim_{x\to 0+} \frac{-x\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0+} \frac{-\cos x+x\sin x}{\cos x} = -1$$

also $g = e^a = e^{-1}$.

g) “0^0“: $a = \ln g = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)}{\ln x}$

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{x}{1+x^2}}{\frac{\pi}{2}-\arctan x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}}{-\frac{1}{1+x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-x^2}{1+x^2} = -1, \qquad g = e^a = e^{-1}$$

<u>Aufgabe 9</u>

$y = f(x)$ ist eine unecht gebrochenrationale Funktion.

Nullstellen: $f(x) = 0,\ x^2+x-6 = 0 \Rightarrow\ x_1 = 2, x_2 = -3$

Polstellen: $(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x_p = 1$ Pol gerader Ordnung (ohne Vorzeichenwechsel)

Durch Polynomdivision kann die Funktion zerlegt werden in einen ganzrationalen und einen echt gebrochen rationalen Summanden. Die Asymptote für $x \to \pm\infty$ ist durch den rationalen Anteil dieser Summe ablesbar, (da der echt gebrochenrationale Anteil gegen Null geht):

$y = -\frac{x^2+x-6}{(x-1)^2} = -(x^2+x-6):(x^2-2x+1) = -1-\frac{3x-7}{(x-1)^2}$, Asymptote ist also $y_A = -1$

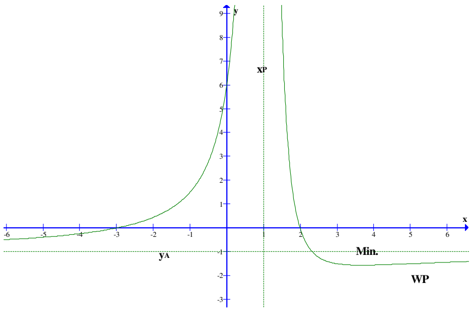
Schnittpunkt : $y = y_A$, also $-1-\frac{3x-7}{(x-1)^2} = -1 \Rightarrow P_S(\frac{7}{3};-1)$

Ableitungen: $y' = \frac{3x-11}{(x-1)^3}$, $y'' = \frac{-6x+30}{(x-1)^4}$, $y''' = \frac{18x-114}{(x-1)^5}$

Extrempunkte: $y' = 0 \Rightarrow x = \frac{11}{3}$ (stationäre Stelle); $y''(\frac{11}{3}) = \frac{3^4}{8^3} > 0$, in $x_E = \frac{11}{3}$ existiert ein lokales Minimum mit $y_E = -\frac{25}{16}$.

Wendepunkte: $y'' = 0 \Rightarrow x = 5,\quad y'''(5) = -\frac{24}{4^5} \neq 0$, $\left(5;-\frac{3}{2}\right)$ ist Wendepunkt.

Gleichung der Wendetangente: $y'(5) = \frac{1}{16}$, $y+\frac{3}{2} = \frac{1}{16}(x-5) \Rightarrow y = \frac{1}{16}x-\frac{29}{16}$



Aufgabe 10

Ableitungen: $y' = \dfrac{8(x^2-1)}{1+4x^2}$, $y'' = \dfrac{80x}{\left(1+4x^2\right)^2}$, $y''' = \dfrac{80}{\left(1+4x^2\right)^2} - \dfrac{1280x^2}{\left(1+4x^2\right)^3}$

Extrema: $x_{E1} = 1$ ist lokale Minimumstelle mit $y_{E1} = -3{,}54$ u. (auch wegen Symmetrieeigenschaften ist)
$x_{E2} = -1$ ist lokale Maximumstelle mit $y_{E1} = 3{,}54$

Aufgabe 11

Nullstellen: $e^x(b-e^x) = 0, e^x \neq 0, \forall x \in R;\ \ b - e^x = 0 \Rightarrow x_N = \ln b\ \ (b>0)$

Ableitungen: $y = be^x - e^{2x}$, $y' = be^x - 2e^{2x}$, $y'' = be^x - 4e^{2x}$, $y''' = be^x - 8e^{2x}$

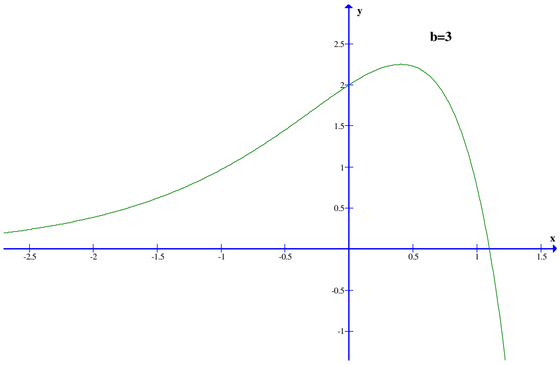
Extrema: $y' = e^x(b-2e^x) = 0 \Rightarrow e^x = \frac{b}{2} \Rightarrow x = \ln\frac{b}{2}$,

$y''(\frac{b}{2}) = be^{\ln\frac{b}{2}} - 4e^{2\ln\frac{b}{2}} = \frac{b^2}{2} - 4\frac{b^2}{4} = -\frac{b^2}{2} < 0,\ (b>0)$; $E\left(\ln\frac{b}{2}, \frac{b^2}{4}\right)$: lokales Maximum

Wendepunkte: $y'' = e^x(b-4e^x) = 0 \Rightarrow x_W = \ln\frac{b}{4}$, $y'''(\ln\frac{b}{4}) = -\frac{b^2}{4} \neq 0$, $W\left(\ln\frac{b}{4}; \frac{3}{16}b^2\right)$

Anstieg der Wendetangente: $y'\left(\ln\frac{b}{4}\right) = \frac{b^2}{8}$,

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x(b-e^x) = 0\cdot b = 0$, $\quad \lim\limits_{x\to\infty} e^x(b-e^x) = \infty\cdot(-\infty) = -\infty$



Aufgabe 12

$$y = \begin{cases} \arcsin\frac{2x}{x^2+2} & \text{für } x \geq 0 \\ -\arcsin\frac{2x}{x^2+2} & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

$y = f(x)$ ist eine gerade Funktion, es genügt, die Extremstellen für $x \geq 0$ zu bestimmen.

Ableitungen $(x \geq 0)$:

$$y' = \frac{-2\left(x^2-2\right)}{\left(x^2+2\right)\sqrt{x^4+4}},\quad y'' = \frac{2x}{\left(x^2+2\right)}\left(\frac{-2}{\sqrt{x^4+4}} + \frac{2\left(x^2-2\right)}{\left(x^2+2\right)\sqrt{x^4+4}} + \frac{2\left(x^2-2\right)x^2}{\left(x^4+4\right)\sqrt{x^4+4}}\right)$$

Extrema: $y' = 0 \Rightarrow x_1 = \sqrt{2}$, da $x \geq 0$, aber wegen Symmetrie auch $x_2 = -\sqrt{2}$

$y''(\sqrt{2}) = -\frac{1}{2}$, $E_1\left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]$ ist lokales Maximum und wegen Symmetrie $E_2\left[-\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]$ ebenfalls

$f(x)$ in $x=0$ nicht differenzierbar ist, da $y'_+(0)=1$ ($y'_-(x)=-y'_+(x)$) und $y'_-(0)=-1$ mit $y(0)=0$ also gibt es in (0;0) ein globales Minimum und da $\lim_{x\to\infty} \arcsin\frac{2x}{x^2+2}=0=\lim_{x\to-\infty} f(x)$ sind die Maxima globale Maxima

Aufgabe 13

$D_f : x^2-x^4=x^2(1-x^2)\geq 0 \Rightarrow |x|\leq 1$. Offensichtlich $W_f : y\geq 0$ und Funktion axialsymmetrisch

Nullstellen: $0=x^2(1-x^2), x_1=0, x_{2/3}=\pm 1$

1. Ableitung: $$y'=\frac{2\left(x-2x^3\right)}{\sqrt{2(x^2-x^4)}}=\frac{2x\left(1-2x^2\right)}{\sqrt{2x^2(1-x^2)}}=\frac{2x\left(1-2x^2\right)}{|x|\sqrt{2(1-x^2)}}=\begin{cases}\frac{2\left(1-2x^2\right)}{\sqrt{2(1-x^2)}} & \text{für } x>0\\ -\frac{2\left(1-2x^2\right)}{\sqrt{2(1-x^2)}} & \text{für } x<0\end{cases}$$

y' existiert nicht für $x_1=-1, x_2=1, x_3=0$ (extremwertverdächtige Stellen)

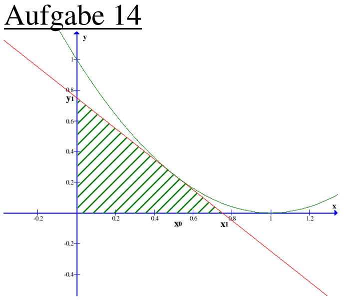
Extrema: $y'=0 \Rightarrow x_4=\frac{1}{2}\sqrt{2}, x_5=-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ (stationäre Stellen)

Für $x_{1/2}=\pm 1$ geht $y'\to\infty$ (vertikale Tangenten) mit $y(\pm 1)=0$ (kleinstmöglicher Fkt.-wert) also sind dort lokale Minima

Für $x=0$ ist $y'_+(0)=\sqrt{2}$ und $y'_-(0)=-\sqrt{2}$ (auch wegen Symmetrie) mit $y(0)=0$ also auch dort ein lokales Minimum. (Vorzeichenwechsel von y': Übergang von mon. fall. zu mon. wachs. Fkt.)

An den stat. Stellen $x_{4/5}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$ müssen deshalb Maxima vorliegen mit $y_{\max}\left(\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{2}$, da innerhalb des Stetigkeitsbereiches zwischen 2 Minima ein Maximum liegen muss.

Aufgabe 14



Gleichung der Tangente: $y=2(x_0-1)x+1-x_0^2$

Schnittpunkt der Tangente mit den Achsen: $x=0:\ y_1=1-x_0^2$

$y=0: 2(x_0-1)x_1+1-x_0^2=0,\ \ x_1=\frac{1}{2}(x_0+1)$

Maximierung des Inhaltes: $A=\frac{1}{2}x_1y_1=\frac{1}{4}(1+x_0)(1-x_0^2)=\frac{1}{4}(-x_0^3-x_0^2+x_0+1)$

Aus $A'=0$ folgt $x_0=\frac{1}{3}$, $A''(x_0=\frac{1}{3})<0$ also Maximum

$x_1=\frac{2}{3}, y_1=\frac{8}{9}, A_{\max}=\frac{8}{27}$

Aufgabe 15

a) $\ln y=(x^2+4)\ln\cos x$,

$\frac{d}{dx}$: $\frac{y'}{y}=2x\ln\cos x-\frac{(x^2+4)\sin x}{\cos x}$ multipliziert mit $y=(\cos x)^{x^2+4}$ ergibt:

$y'=\left(2x\ln\cos x-(x^2+4)\tan x\right)(\cos x)^{x^2+4}$

b) $\ln y = a\ln x + x\ln a + \ln^2 x, \quad y' = \left(a + x\ln a + 2\ln x\right)x^{a-1}a^x x^{\ln x}$

c) $\ln y = \frac{1}{x}\left(\ln(x-1) - \ln(x+1)\right)$

$$y' = \left(-\frac{1}{x^2}\left(\ln(x-1) - \ln(x+1)\right) + \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)\right)\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^2}\left(\ln\frac{x+1}{x-1} + \frac{2x}{x^2-1}\right)\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$$