Kapitel 3

Funktionen, Folgen und Reihen

(Prof. Elias Wegert)

3.1 Vorbemerkungen

Die Mathematik zeichnet sich unter anderem durch eine ungewohnte Schärfe der Begriffsbildungen aus – in der Regel ist bei der Beschreibung eines mathematischen Sachverhalts jedes Wort von Bedeutung. Im Laufe der Entwicklung einer „mathematischen Kultur“ haben sich bestimmte standardisierte Redewendungen herausgebildet, von denen Sie einige bereits aus den vorangehenden Kapiteln kennen. Nicht immer sind mathematische Begriffe mit denen in der Schule verwendeten deckungsgleich – achten Sie deshalb genau auf Formulierungen und versuchen Sie, solche Unterschiede festzustellen und zu verstehen.

3.2 Funktionen

Der Begriff „Funktion“ ist eines der wichtigsten mathematischen Konzepte überhaupt. Im Studium werden Sie sehr allgemeine Funktionen kennenlernen, die kaum noch etwas mit den aus der Schule bekannten Funktionen zu tun haben. Wir geben deshalb die folgende Definition, die für unsere Zwecke das Wesen von Funktionen gut beschreibt.

Definition 3.2.1. Eine *Funktion* $f : X \to Y$ ist eine *Zuordnungsvorschrift*, die *jedem* Element x einer Menge X *genau ein* Element $f(x)$ aus einer Menge Y zuordnet. Die Menge X heißt *Definitionsbereich* der Funktion, die Menge Y wird als *Wertevorrat* der Funktion bezeichnet. Das Element $f(x)$ ist der *Funktionswert* des Elements x unter der Wirkung der Funktion f.

Symbolisch schreibt man Funktionen (ausführlich) in der Form

$$f : X \to Y,\ x \mapsto f(x),$$

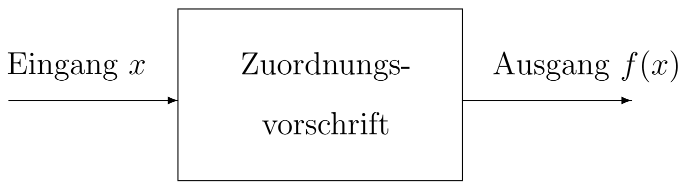
und liest dies (beispielsweise) als „die Funktion f wirkt von X in Y und bildet (das *Argument*) x auf (den *Funktionswert*) $f(x)$ ab.“

Man beachte, dass die Funktion als Ganzes mit dem Symbol f bezeichnet wird, während $f(x)$ für den Funktionswert von x (unter der Abbildung f) steht.[1]

In der Analysis ist *Abbildung* ein Synonym für Funktion, den Definitionsbereich nennt man auch *Definitionsgebiet*, und anstelle von Wertevorrat sagt man auch *Zielbereich*.

Wer ganz kritisch ist (und das ist gut!), wird bemängeln, dass die Definition den Begriff *Zuordnungsvorschrift* verwendet, der genau genommen ebenfalls erklärt werden muss. Dies kann man formal mit Hilfe von *Relationen* tun. Wir gehen aber davon aus, dass dieses Konzept intuitiv verständlich ist: in eine „Zuordnungsvorschrift“ steckt man etwas hinein, nämlich (zulässige) Elemente x des Definitionsbereichs X, und es kommt etwas heraus, nämlich das zugeordenete Element $f(x)$.

Die Wirkung einer Funktion kann man gut mit einem „Blockschaltbild“ veranschaulichen. Die „Eingangsvariable“ x wird auch als *Argument* der Funktion bezeichnet, der Funktionswert $y = f(x)$ ist die „Ausgangsvariable“ der Funktion.



Achtung: Zur Festlegung einer Funktion gehört neben der Zuordnungsvorschrift immer auch die Angabe ihres Definitionsbereichs. Die beliebten Aufgaben der Art „Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Funktion soundso“ (wobei „soundso“ für eine Zuordnungsvorschrift steht) haben keinen Sinn! Die Angabe des Wertevorrats Y ist dagegen mit etwas Willkür behaftet: Jeder mögliche Wertevorrat muss zumindest alle Funktionswerte $f(x)$ von Elementen x des Definitionsgebiets X enthalten, die Menge Y kann aber auch größer gewählt werden. Der kleinstmögliche Wertevorrat

$$W = \{f(x) : x \in X\}$$

wird als *Wertebereich* oder *Bildmenge* der Funktion bezeichnet. Sind A und B beliebige Teilmengen von X bzw. Y, nennt man die Mengen

$$f(A) := \{f(x) \in Y : x \in A\}, \qquad f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$$

Bildmenge von A bzw. *Urbildmenge* von B unter der Abbildung f.

Wie oben bereits erläutert, gehört zu einer Funktion stets die Angabe ihres Definitionsbereichs. Wenn man diesen (künstlich) verkleinert, erhält man eine neue Funktion.

[1] Diese Unterscheidung wird allerdings nicht immer streng eingehalten.

Definition 3.2.2. Eine Funktion $f_1 : X_1 \to Y_1$ heißt *Einschränkung* der Funktion $f_2 : X_2 \to Y_2$, wenn X_1 eine (nicht notwendig echte) *Teilmenge*[2] von X_2 ist, $X_1 \subset X_2$, und für jedes $x \in X_1$ gilt $f_1(x) = f_2(x)$. Die Funktion f_2 wird dann als *Fortsetzung* von f_1 auf X_2 bezeichnet. Zwei Funktionen heißen *gleich*, wenn jede eine Fortsetzung der anderen ist.

Zwei Funktionen $f_1 : X_1 \to Y_1$ und $f_2 : X_2 \to Y_2$ sind also genau dann *gleich*, wenn ihre Definitionsbereiche übereinstimmen, $X_1 = X_2$, und für jedes $x \in X_1$ gilt $f_1(x) = f_2(x)$.

Der Funktionsbegriff verlangt, dass eine Funktion $f : X \to Y$ jedem $x \in X$ *genau einen*[3] Funktionswert $y := f(x)$ aus Y zuordnet. Es ist allerdings möglich, dass *verschiedene x denselben* Funktionswert besitzen. Um das gegebenenfalls ausschließen, führt man die folgenden Begriffe ein.

Definition 3.2.3. Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt

(i) *injektiv*, wenn für alle $x_1, x_2 \in X$ aus $f(x_1) = f(x_2)$ stets folgt $x_1 = x_2$,

(ii) *surjektiv*, wenn ihre Bildmenge $f(X)$ gleich Y ist,

(iii) *bijektiv*, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Der letzte Begriff ist insbesondere wichtig, wenn man Umkehrfunktionen betrachtet. Wie der Name vermuten lässt, kehrt eine Umkehrfunktion g von $f : X \to Y$ die Abbildungsrichtung um und hebt dabei die Wirkung von f auf; also $g : Y \to X$ und $y = f(x)$ gilt genau dann, wenn $x = g(y)$. Dies ist gleichbedeutend mit den Bedingungen $x = g(f(x))$ für alle $x \in X$ und $y = f(g(y))$ für alle y. Um dies noch etwas zu formalisieren, definieren wir einige Begriffe.

Definition 3.2.4. Die *Verkettung* oder *Komposition* zweier Funktionen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ ist die Funktion $g \circ f : X \to Z,\ x \mapsto g(f(x))$. Die Funktion $\mathrm{id}_X : X \to X,\ x \mapsto x$ heißt *identische Abbildung* von X.

Man veranschauliche sich diese Definitionen mit einem „Blockschaltbild“.

Definition 3.2.5. Eine Funktion $g : Y \to X$ heißt *Umkehrfunktion* (*inverse Funktion*) der Funktion $f : X \to Y$, falls $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

Man überlege sich, dass eine Funktion genau dann eine Umkehrfunktion besitzt, wenn sie bijektiv ist. Die Umkehrfunktion ist dann eindeutig bestimmt und wird mit f^{-1} bezeichnet.

Funktionen beschreiben Abhängigkeiten (des Funktionswerts $f(x)$ vom Argument x). Ein zentrales Thema ist deshalb das Verhalten der Funktionswerte bei Änderung des Arguments. Dies kann man unter verschiedenen Aspekten untersuchen. Wir betrachten hier nur Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$, die auf einer Teilmenge X der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ definiert sind und reelle Funktionswerte annehmen. Eine einfache Eigenschaft wird in der folgenden Definition beschrieben.

[2] In der Analysis und vielen (aber nicht allen) Bereichen der Mathematik schließt das Teilmengenymbol $X_1 \subset X_2$ die Gleichheit beider Mengen ein.

[3] Man beachte, dass in der Mathematik „es gibt ein(en)“ immer im Sinne von „es gibt mindestens ein(en)“ gebraucht wird.

Definition 3.2.6. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ mit $X \subset \mathbb{R}$ heißt

(i) *monoton wachsend* (*monoton steigend*), wenn aus $x_1 < x_2$ stets folgt $f(x_1) \leq f(x_2)$,

(ii) *monoton fallend* (*monoton sinkend*), wenn aus $x_1 < x_2$ stets folgt $f(x_1) \geq f(x_2)$,

(iii) *monoton*, wenn sie *monoton wachsend* oder *monoton fallend* ist.

Man beachte, dass in den Aussagen (i) und (ii) die Gleichheit von Funktionswerten zugelassen ist. Gelten sogar die strikten Ungleichungen, spricht man von *strenger Monotonie*. Konstante Funktionen (und nur diese) sind deshalb sowohl monoton wachsend als auch monoton fallend. Monotonie kann man auch auf einer Teilmenge des Definitionsbereichs betrachten (meist auf einem Intervall).

Eine weitere Eigenschaft fällt in die Kategorie „kleine Ursachen haben (nur) kleine Wirkungen". Die Frage, ob „kleine" Änderungen des Arguments x auch nur „kleine" Auswirkungen auf die Änderung des Funktionswerts $f(x)$ haben, hat in einer langen (und nicht ganz schmerzfreien) historischen Entwicklung zum heutigen Konzept der *Stetigkeit* geführt.

Natürlich muss man dazu zunächst die Bedeutung von „klein" präzisieren. Bei der Stetigkeit von Funktionen geht es darum, dass die Änderungen des Funktionswerts $f(x)$ *beliebig klein* werden, solange nur die Änderung des Arguments x *hinreichend klein* ist. Dies wird in der folgenden berühmten ε-δ-Definition genau beschrieben.

Definition 3.2.7. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ mit $X \subset \mathbb{R}$ heißt *im Punkt* x_0 aus X *stetig*, falls *für jedes*[4] positive ε ein positives δ existiert, so dass aus $x \in X$ und $|x - x_0| < \delta$ stets folgt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, also formalisiert

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X : \quad |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0| < \varepsilon.$$

Die Funktion f heißt *stetig auf* X, wenn sie in jedem Punkt $x_0 \in X$ stetig ist.

Um diese kunstvolle Definition besser zu verinnerlichen, kann man die beiden Größen ε und δ als *Toleranz* und *Spiel* interpretieren: Wenn f stetig ist, kann eine (beliebig vorgegebene) Toleranz ε der Funktionswerte $f(x)$ eingehalten werden, solange das zulässige Spiel δ der Argumente x nicht überschritten wird.

Es gibt eine Reihe äquivalenter Stetigkeitsdefinitionen, mit denen wir uns hier (noch) nicht beschäftigen wollen. „Definitionen" der Art: eine Funktion ist stetig, wenn

(a) sich ihr Graph in einem Zug zeichnen lässt,

(b) sie keine Lücken, Sprünge und Polstellen besitzt,

sind allerdings *völlig unbrauchbar*, wenn man ernsthaft Mathematik betreiben will.

[4] Auch wenn der Quantifikator $\forall$ oft als „für alle" gelesen wird, sollte man an dieser Stelle (und eigentlich generell) besser „für jedes" sagen, weil „für alle" missverständlich suggeriert, dass für alle ε *ein und dasselbe* δ existiert.

3.3 Folgen

Folgen sind Funktionen, die auf der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}$ oder der Menge $\mathbb{N}_+ := \{1, 2, 3, \ldots\}$ der positiven natürlichen Zahlen definiert sind. Die Werte einer Folge gibt man meist durch Indizierung an, also beispielsweise $a_1, a_2, a_3, \ldots$, und nennt die a_k *Glieder* oder *Elemente* der Folge. Die Folge als Gesamtheit schreiben wir als $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ oder einfach (a_k). Die Glieder einer Folge können Elemente einer beliebigen Menge sein, wir betrachten hier aber nur reelle (Zahlen-)Folgen mit $a_k \in \mathbb{R}$.

Beispiel 1. Die Folge $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ mit $a_k := a + kd$ heißt *arithmetische Folge* mit dem *Anfangsglied* $a_0 = a$ und der *Differenz* d.

Beispiel 2. Die Folge $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ mit $a_k := a\,q^k$ für $k \in \mathbb{N}$ (und $a \neq 0$) heißt *geometrische Folge* mit dem *Anfangsglied* $a_0 = a$ und dem *Quotienten* q.

Wie jede Funktion muss auch eine Folge durch eine Zuordnungsvorschrift definiert werden. Dafür gibt es prinzipiell verschiedene Möglichkeiten. Die beiden obigen Beispiele verwenden eine *explizite* Darstellung des Bildungsgesetzes der Folge. Häufig sind Folgen *rekursiv* definiert. Die arithmetische und die geometrische Folge von oben kann man beispielsweise auch durch Vorgabe des Anfangsgliedes $a_0 = a$ und die *Rekursionsvorschriften*

$$a_{k+1} := a_k + d, \qquad \text{bzw.} \qquad a_{k+1} := q\,a_k, \quad \text{für} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

definieren, die der Reihe nach die Werte $a_1, a_2, \ldots$ liefern.

Eigenschaften von Funktionen (Monotonie) sind auch für Folgen sinnvoll. Das Hauptinteresse bei der Untersuchung von Funktionen betrifft aber ihr „Langzeitverhalten“, also die Werte a_k für große k. Dies führt zum einem zentralen Begriff, auf dem die gesamte Analysis aufbaut.

Definition 3.3.1. Eine Zahl a heißt *Grenzwert* der Folge (a_k), wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zahl k_0 existiert, so dass für alle $k \geq k_0$ gilt $|a_k - a| < \varepsilon$. Eine Folge die einen Grenzwert besitzt[5] heißt konvergent (gegen a), in Zeichen $a_n \to a$ oder $\lim_{k\to\infty} a_k = a$. Folgen die nicht konvergieren nennt man *divergent*.

Konvergenz gegen a bedeutet anschaulich, dass alle Folgenglieder a_k dem Grenzwert a beliebig nahe kommen (nämlich einen Abstand kleiner ε besitzen), wenn nur der Index k hinreichend groß ist (nämlich mindestens k_0). Die Zahl k_0 ist in der Regel von ε abhängig; typischerweise muss k_0 vergrößert werden, wenn ε verkleinert wird.

Beispiel 3. Die arithmetische Folge $(a + kd)$ konvergiert genau für $d = 0$, und zwar gegen a. Die geometrische Folge $\left(a\,q^k\right)$ mit $a \neq 0$ konvergiert genau für $-1 < q \leq 1$, und zwar gegen 0 für $-1 < q < 1$ und gegen a für $q = 1$.

[5] Dieser Grenzwert ist dann eindeutig bestimmt.

3.4 Reihen

Die Glieder einer Folge $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ kann man aufsummieren. Zur Abkürzung definieren wir für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$ zunächst ein Symbol (das Summenzeichen) für die Summe aller Folgeglieder von a_m bis a_n,

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n.$$

Addition der ersten aufeinander folgenden Glieder von $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ liefert die sogenannten *Partialsummen* der Folge (a_k),

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k := a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Diese bilden eine neue Folge $(s_n)_{n=0}^{\infty}$. Mitunter kann man die Partialsummen einer Folge explizit berechnen.

Beispiel 4. Für die Partialsummen der *arithmetischen Reihe* gilt

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} (a + kd) = a\,(n+1) + d\,\frac{n(n+1)}{2}.$$

Für $a = 0$ und $d = 1$ ist s_n die Summe der ersten n natürlichen Zahlen. Mit dem „Gaußschen Trick“, die Summe einmal vorwärts und einmal rückwärts aufzuschreiben, erhält man

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n \\ s_n &= n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1, \end{aligned}$$

Addition und Abzählen liefert $2s_n = n(n+1)$. Die allgemeine Aussage folgt nun aus

$$\sum_{k=0}^{n} (a + kd) = \sum_{k=0}^{n} a + d \sum_{k=0}^{n} k.$$

Beispiel 5. Für die Partialsummen der *geometrischen Reihe* mit $q \neq 1$ gilt

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a\,q^k = a\,\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Zur Vereinfachung betrachten wir zunächst $a = 1$. Hier besteht der Trick in der Subtraktion von s_n und qs_n,

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} + q^n \\ q\,s_n &= \phantom{1 + {}} q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} + q^n + q^{n+1}, \end{aligned}$$

wobei sich alle Summanden bis auf zwei gegenseitig wegheben,

$$(1 - q)\,s_n = 1 - q^{n+1}.$$

Ein beliebiges a kann man als Faktor vor die Partialsummen ziehen. Für $q = 1$ ist offenbar $s_n = (n+1)\,a$.

Die Untersuchung des Verhaltens der Partialsummen s_n für große n führt schließlich zum Begriff der *Reihe*.

Definition 3.4.1. Wenn die Folge (s_n) der Partialsummen gegen s konvergiert, nennt man die *Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent und bezeichnet s als ihre *Summe*, in Zeichen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Beispiel 6. Die geometrische Reihe mit $a \neq 0$ konvergiert genau für $|q| < 1$ und besitzt dann die Summe

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a\, q^k = \frac{a}{1-q}.$$

Die Aussage folgt aus der Formel für die Partialsummen und der Konvergenz von q^{n+1} gegen 0 für $|q| < 1$ sowie der Divergenz für $|q| \geq 1$.

Fragen der Konvergenz von Folgen und Reihen werden in der Analysis-Vorlesung (aber nicht nur dort!) eine wichtige Rolle spielen.