Kapitel 1

Kombinatorik

(Prof. K. Gerald van den Boogaart)

1.1 Grundprinzipien

1.1.1 Auswahl aus Möglichkeiten

Frage 1. Wie viele Möglichkeiten gibt es, ein Element aus einer Menge M auszuwählen?

$$n = |M|$$

1.1.2 Kombination von Auswahlen

Frage 2. Wie viele Möglichkeiten gibt es, ein Element aus einer Menge M oder einer Menge N auszuwählen?

$$|M \dot\cup N| = |M| + |N|$$

Frage 3. Wie viele Möglichkeiten gibt es, ein Element aus einer Menge M und dann aus einer Menge N auszuwählen?

$$|M \times N| = |M| \cdot |N|$$

Frage 4. Wie viele n-Tupel aus einer Menge M gibt es?

$$|M^n| = |M|^n$$

Frage 5. Wie viele Möglichkeiten gibt es, ein Element aus einer Menge M auszuwählen, wenn kein Element der Menge N gewählt werden darf?

$$|M \setminus N| = |M| - |N \cap M|$$

1.1.3 Identifikation von Möglichkeiten

Frage 6. Wie viele Möglichkeiten gibt es, eine Teilmenge von 2 Elementen aus einer Menge von n Elementen auszuwählen?

Idee: Wir wählen nacheinander ein erstes und ein zweites Element. Für das erste gibt es n Möglichkeiten. Für das zweite $n-1$. Es gibt also $n \cdot (n-1)$ Möglichkeiten für diese Auswahl. Wir erhalten jeweils Teilmengen der Mächtigkeit 2. Aber zwei Möglichkeiten ergeben jeweils die gleiche Teilmenge: Jedes der beiden Elemente könnten zuerst ausgewählt worden sein. Es gehören also jeweils zwei Auswahlentscheidungen zu einer gewählten Teilmenge. Wir teilen also die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten $n(n-1)$ durch die Anzahl 2 der jeweils als gleich zu betrachtenden Fälle.

$$|\{\{a,b\}|a \neq b, a, b \in M\}| = (|M|(|M|-1))/2$$

Die Idee lautet also: Können jeweils k Fälle als gleich betrachtet werden, so teilt man die Anzahl aller Fälle durch die Anzahl der jeweils als gleich zu betrachtenden Fälle.

Spielarten des Identifizierens hier:

- Mengen sind Tupel, deren Reihenfolge egal ist.
- Die Auswahl des zweiten Elements erfolgt aus einer Restmenge, deren Zusammensetzung egal ist. Deshalb verwenden wir das Produkt obwohl wir es mit verschiedenen Mengen zu tun haben.
- Zwei Auswahlen werden identifiziert, wenn sie zum gleichen Ergebnis führen.

Merke: Für die Anzahl ist es also immmer wichtig klar zu definieren, welche Situationen als gleich betrachtet werden. Dabei kann ein „Ding“ leicht ein mathematisches Objekt, wie z.B. eine Menge sein.

1.1.4 Mit oder ohne Wiederholen

Bei multiplen Auswahlen aus einer Menge ist es immer wichtig, ob ein bereits gewähltes Element noch mal gewählt werden darf: also $n \cdot n$ vs. $n \cdot (n-1)$.

1.2 Teilmengen

Frage 7. Wie viele Teilmengen hat eine Menge M?

$2^{|M|}$, weil wir für jedes Element eine Auswahl aus $\{ja, nein\}$ treffen können.

1.3 Permutationen: Anordnen

Frage 8. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Elemente einer Menge M in einer Reihenfolge anzuordnen?

$|\{(a_1,\ldots,a_n)\,|\,a_i \neq a_j \Leftrightarrow i \neq j \ \wedge\ a_i \in M\}| = \prod_{i=0}^{|M|-1}(M-i) =: |M|!$

1.4 Variationen: Teilauswahlen mit Reihenfolge

Frage 9. Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus einer Menge N mit n Elementen m Elemente in einer Reihenfolge anzuordnen, wobei die Elemente mehrfach gewählt werden dürfen?

$|\{(a_1,\ldots,a_m)\,|\,a_i \in M\}| = \prod_{i=0}^{m} n = n^m$

Frage 10. Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus einer Menge M der Größe $|M| = n$ m **verschiedene** in einer Reihenfolge auszuwählen? (Variation ohne Wiederholung)

$|\{(a_1,\ldots,a_m)\,|\,a_i \neq a_j \Leftrightarrow i \neq j \ \wedge\ a_i \in M\}| = \prod_{i=0}^{m-1}(n-i) =: \frac{n!}{(n-m)!}$

1.5 Kombinationen: Auswahl

Frage 11. Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus einer Menge N der Größe n k Auswahlen zu treffen, wobei die Elemente mehrfach gewählt werden können, aber ihre Reihenfolge egal ist? (Kombination mit Wiederholung)

$$\binom{n+k-1}{k}$$

Frage 12. Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus einer Menge N der Größe n Teilmengen der Größe k zu bilden? (Kombination ohne Wiederholung)

$$|\{K|K \subset N, |K| = k\}| = \frac{n!}{(n-k)!k!} =: \binom{n}{k}$$

1.6 Hintergrund zu Aufgaben mit Wahrscheinlichkeitsbezug

Bei Laplacewahrscheinlichkeiten geht man davon aus, dass alle Kombinationsmöglichkeiten gleich wahrscheinlich sind. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine gewisse Teilmenge von Möglichkeiten eintritt, entspricht dann dem Anteil dieser Möglichkeiten an der Gesamtzahl aller Möglichkeiten.

Bei Wahrscheinlichkeiten für unabhängige Experimente geht man davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit, dass Möglichkeiten gemeinsam auftreten, dem Produkt ihrer Auftretenswahrscheinlichkeiten entsprechen. Ist also z.B. die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein sechsseitiger Würfel eine bestimmte Zahl, wie eine 6 zeigt, 1/6, dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim Werfen von zwei Würfeln der erste und der zweite Würfel 6 zeigen gleich $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$. Es gibt aber zwei Möglichkeiten und damit eine Wahrscheinlichkeit von $2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ dafür, dass eine 5 und eine 6 gewürfelt wird, da der erste oder der zweite Würfel eine 6 gewürfelt haben könnte und der andere es ergänzt hat.

1.7 Übungsaufgaben

Frage 13. Wir haben eine Klasse mit 24 Schülern, davon 12 Jungen und 12 Mädchen.

1. Wie viele Möglichkeiten gibt es, jemanden für eine Aufgabe auszusuchen?
2. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, in der Klasse ein Tanzpaar (also ein Junge und ein Mädchen) zu bilden?
3. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Klasse vollständig in Tanzpaare aufzuteilen?
4. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 6 Schüler oder Schülerinnen für eine Auswähl auszuwählen?
5. Wie ändert sich diese Anzahl, wenn in der Auswahl mindestens ein Junge und ein Mädchen sein muss?
6. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer zufälligen Auswahl von 6 Personen, keine Schülerin in der Auswahl ist?
7. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass in diesem Fall die Auswahl nur ein Geschlecht zeigt?
8. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 4 gleich große Mannschaften zu bilden?
9. Der Lehrer wählt angeblich zufällig mit einer Laplacewahrscheinlichkeit 10 mal hintereinander einen Schüler oder eine Schülerin aus. Wie hoch ist unter diesen Voraussetzungen die Wahrscheinlichkeit, dass zumindest ein Schüler oder eine Schülerin zweimal getroffen wird?

Frage 14. Wie viele Kombinationsmöglichkeiten hat ein 5–stelliges Zahlenschloss?

Frage 15. Was ist die Wahrscheinlichkeit für einen 6-er beim Lotto 6 aus 49 ?

Frage 16. Beim Spiel „Mensch ärgere Dich nicht!“ kann man beginnen, d.h. kann eine der vier Figuren herausgesetzt werden, wenn man eine 6 würfelt.

1. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, nach 10 Runden genau 4 Mal eine 6 gewürfelt zu haben?

2. Wie ändert sich die Wahrscheinlichkeit, wenn die 4-te Sechs genau in der 10-ten Runde kommen soll?

Frage 17. Wie viele Möglichkeiten gibt es, Rubik's Cube zusammenzubauen? (und wieviele ihn einzustellen, ohne ihn zu zerlegen?)

Frage 18. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 4 Anschlüsse jeweils mit einem von 7 Anschlüssen zu verbinden, so dass jeder der 4 Anschlüsse mit einem anderen der 7 verbunden ist und die verbleibenden frei bleiben?

Frage 19. Wie viele verschiedene Sitzordnungen gibt es für 6 Gäste an einem runden Tisch? Wie viele sind es, wenn immer abwechselnd ein Mann und eine Frau sitzen muss? Wie viele sind es, wenn zusätzlich Donald nicht neben Hillary sitzen darf?

Frage 20. Wie viele Möglichkeiten gibt es, eine Menge N der Mächtigkeit $|N|$ in m Folgen der Längen $k_1, \ldots, k_m$ einzuteilen, wobei Wiederholungen erlaubt sind?

Frage 21. Wie viele Möglichkeiten gibt es, eine Menge N der Mächtigkeit $|N|$ in m Folgen der Längen $k_1, \ldots, k_m$ einzuteilen, wobei Wiederholungen nicht erlaubt sind?

Frage 22. Wie viele Möglichkeiten gibt es, eine Menge N mit $n = |N|$ Elementen in m disjunkte Teilmengen der Größen $n_1, \ldots, n_m$ aufzuteilen?