2.2.2 Stetige Verteilungen

Stetige Gleichverteilung auf $[a, b]$

Bezeichnung: $X \sim \mathbf{U}[a, b]$.

Dichtefunktion: $(a < b)$

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & : a \leq t \leq b \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

Verteilungsfunktion:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & : t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & : a \leq t \leq b \\ 1 & : t > b \end{cases}$$

Kenngrößen:

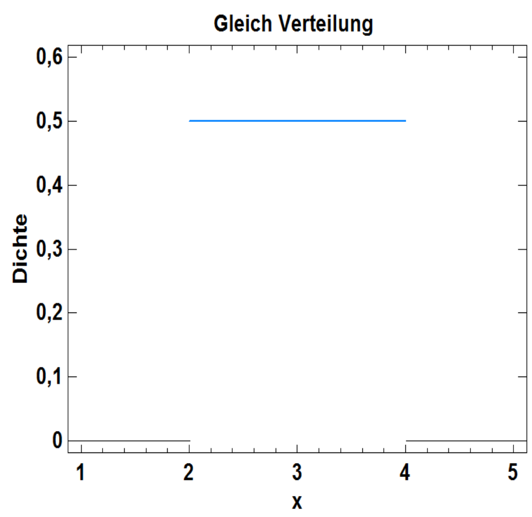
$$\text{Median}(X) = \mathbf{E}X = \frac{a+b}{2} \quad \text{und} \quad \mathbf{Var}X = \frac{(a-b)^2}{12}$$

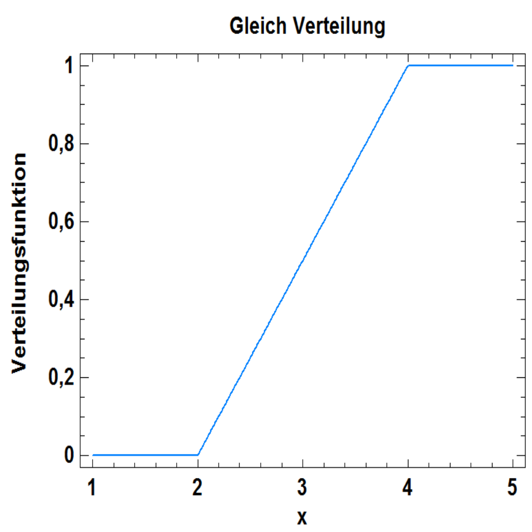
Eigenschaften: nichtinformative Verteilung

Anwendung:

- Grundlage für die Erzeugung von Zufallszahlen
- In allen Teilintervalle von $[a, b]$, mit gleicher Länge, liegt die gleichverteilte Zufallsvariable mit derselben Wahrscheinlichkeit.

Beispiel: $X \sim \mathbf{U}[2, 4]$





Normalverteilung

Bezeichnung: $X \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$.

Dichtefunktion: $(\sigma > 0)$

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Kenngrößen:

$$\mathrm{Median}(X) = \mathbf{E}X = \mu \quad \text{und} \quad \mathbf{Var}X = \sigma^2$$

Eigenschaften:

- Die Summe unabhängiger normalverteilter Zufallsgrößen ist normalverteilt:

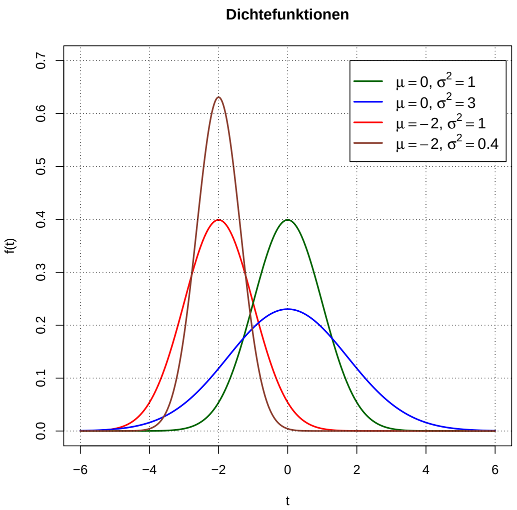
$$X_i \sim \mathbf{N}(\mu_i, \sigma_i^2) \quad i = 1, \ldots, n \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2) \quad \text{mit } \mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2.$$

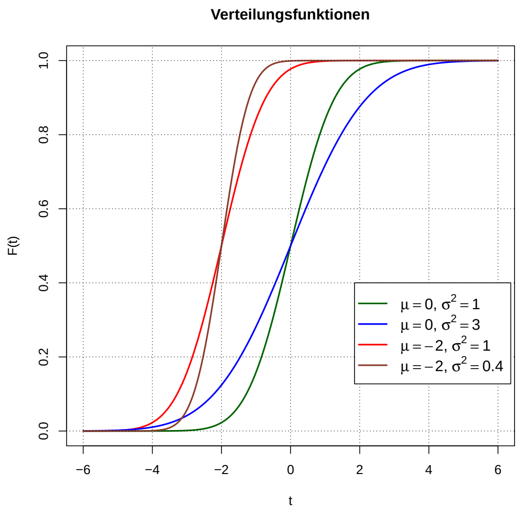
- Die standardisierte Summe unabhängiger, identisch verteilter Zufallsgrößen $X_1, X_2, \ldots$ konvergiert in Verteilung gegen die Standardnormalverteilung (Zentraler Grenzwertsatz).

Anwendungen:

- Die Normalverteilung eine wichtige Näherungsverteilung (Zentraler Grenzwertsatz).
- Zufällige Messfehler sind oft (zumindest näherungsweise) normalverteilt.
- Die zufällige Abweichungen vom Sollmaß beim Fertigen von Werkstücken ist oft (zumindest näherungsweise) normalverteilt.
- Viele Verfahren der Statistik basieren auf dieser Verteilung.

Beispiele: $X \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$





Standardnormalverteilung

Ist X normalverteilt mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 ($X \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$) dann ist

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma} \qquad \text{standardnormalverteilt,}$$

d.h. normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz 1 ($Y \sim \mathbf{N}(0, 1)$).

Verteilungsfunktion: Die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung wird mit Φ bezeichnet und ist vertafelt.

Logarithmische Normalverteilung

Bezeichnung: $X \sim \mathbf{LogN}(\mu, \sigma^2)$.

Dichtefunktion: $(\sigma > 0)$

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma t \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right)^2} & : t > 0 \\ 0 & : t \leq 0 \end{cases}$$

Kenngrößen:

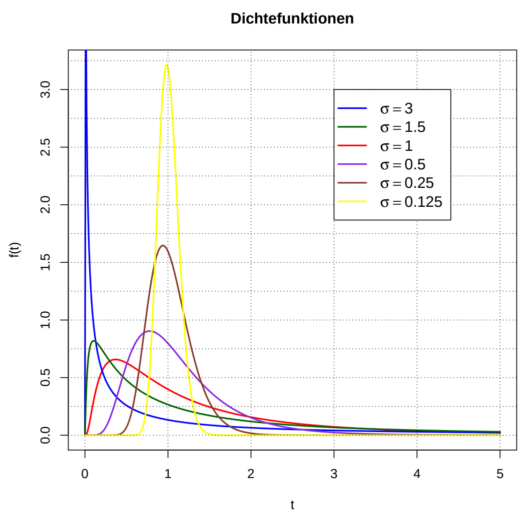
$$\text{Median}(X) = e^{\mu}, \quad \mathbf{E}X = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \quad \text{und} \quad \mathbf{Var}X = e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$$

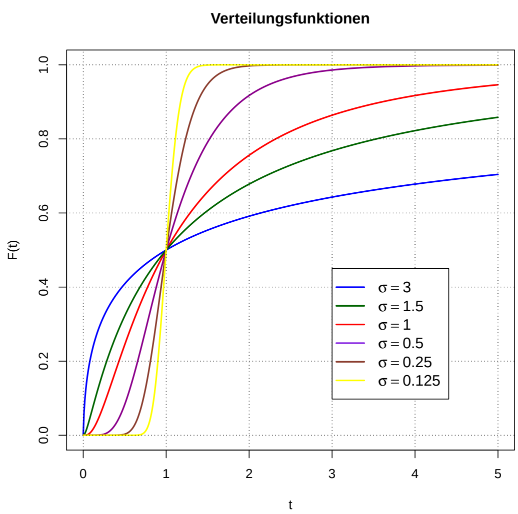
Eigenschaften: $\ln X \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$.

Anwendungen:

- bei Zeitstudien und Lebendaueranalysen in ökonomoischen, technischen und biologischen Vorgängen;
- bei Untersuchungen in der analytischen Chemie, wie Konzentrations- und Reinheitsprüfungen;
- für zufällige nichtnegative Materialparameter, z.B. Permeabilitäten;
- als Grenzverteilung für Produkte unabhängiger positiver Zufallsgrößen (unter bestimmten Bedingungen).

Beispiel: $X \sim \mathbf{LogN}(0, \sigma^2)$





Exponentialverteilung

Bezeichnung: $X \sim \mathbf{Exp}(\lambda)$.

Dichtefunktion: $(\lambda > 0)$

$$f(t) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda t} & : t \geq 0 \\ 0 & : t < 0 \end{cases}$$

Verteilungsfunktion:

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & : t \geq 0 \\ 0 & : t < 0 \end{cases}$$

Kenngrößen:

$$\mathrm{Median}(X) = \frac{\ln 2}{\lambda}, \quad \mathbf{E}X = \frac{1}{\lambda} \quad \text{und} \quad \mathbf{Var}X = \frac{1}{\lambda^2}$$

Eigenschaften: Verteilung „ohne Gedächtnis“, d.h

$$P(X \geq x + t | X \geq x) = P(X \geq t) \qquad \text{(Markov–Eigenschaft)}$$

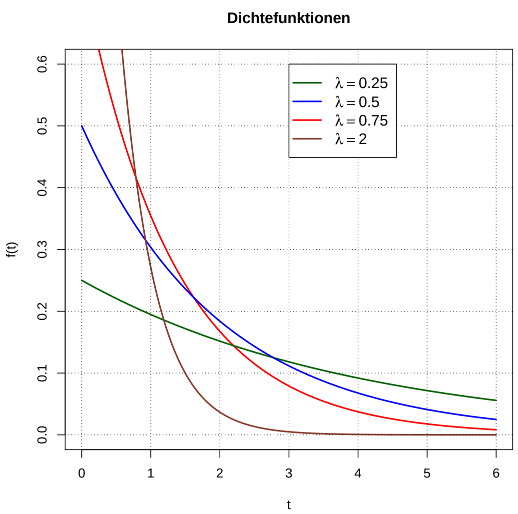
Die Summe unabhängiger und identisch exponentialverteilter Zufallsgrößen ist Gammaverteilt.

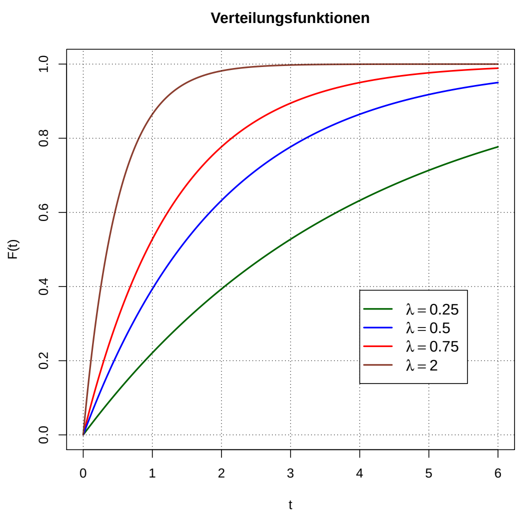
Anwendungen:

- Der Abstand zwischen zwei Ereignissen eines homogenen Poisson-Prozesses mit Intensität λ ist exponentialverteilt mit Parameter λ. Für diesen homogenen Poisson-Prozess ist die Anzahl der Ereignisse im Intervall $[0, t]$ poissonverteilt mit Parameter $\lambda \cdot t$ ($N_t \sim \mathbf{Poi}(\lambda \cdot t)$). Weiter sind, gegeben $N_t = n$, die Punkte des homogenen Poisson-Prozesses gleichverteilt auf $[0, t]$.

- Anwendung findet die Exponentialverteilung als Lebensdauerverteilung (ohne Alterung), in der Zuverlässigkeitstheorie und in der Bedienungstheorie.

<u>Beispiele:</u> $X \sim \mathbf{Exp}(\lambda)$





Gammaverteilung

Bezeichnung: $X \sim \mathbf{Gam}(p, \lambda)$.

Parameter: $\lambda > 0$: Skalenparameter
$p > 0$: Formparameter

Dichtefunktion:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)} t^{p-1} \exp\left(-\lambda t\right) & : t > 0 \\ 0 & : t \leq 0 \end{cases}$$

Mit Γ der Gammafunktion:

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty \exp(-t) t^{p-1} dt \quad p > 0 \qquad (\text{damit ist } \Gamma(1) = 1 \text{ und } \Gamma(n) = (n-1)! \text{ für } n \in \mathbb{N}).$$

Momente:

$$\mathbf{E}X = \frac{p}{\lambda} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{Var}X = \frac{p}{\lambda^2}$$

Eigenschaften:

- $X_1 \sim \mathbf{Gam}(p_1, \lambda)$, $X_2 \sim \mathbf{Gam}(p_2, \lambda)$, unabhängig

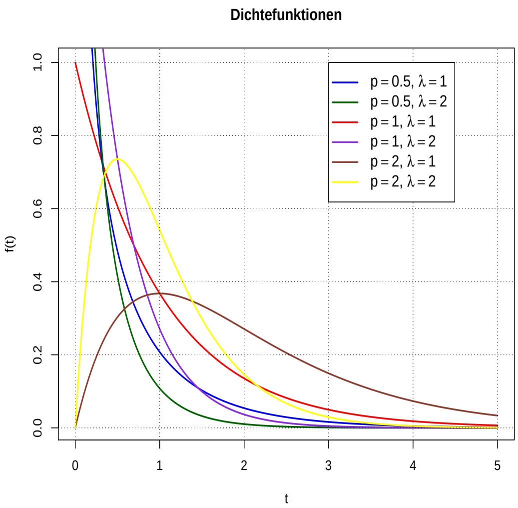
$$\Longrightarrow X_1 + X_2 \sim \mathbf{Gam}(p_1 + p_2, \lambda)$$

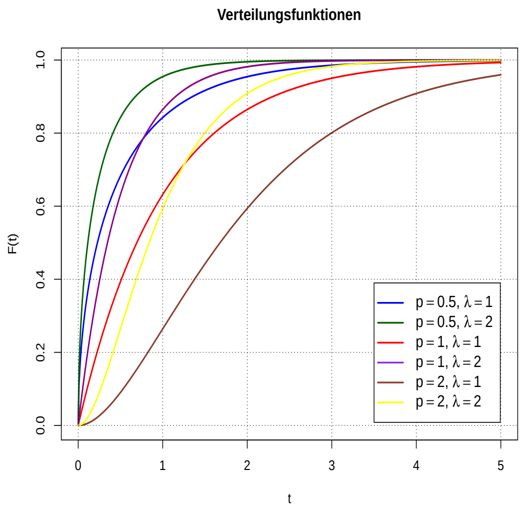
- $X_i \sim \mathbf{Exp}(\lambda), i = 1, \ldots, n$, unabhängig

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^n X_i \sim \mathbf{Gam}(n, \lambda)$$

Spezialfall: Erlangverteilung falls $p = n \in \mathbb{N}$.
Anwendung: Lebensdauerverteilung.

Beispiele: $X \sim \mathbf{Gam}(p, \lambda)$





Weibull-Verteilung

Bezeichnung: $X \sim \mathbf{Wei}(\alpha, \beta, m)$.

Parameter: $\alpha :$ Verschiebungsparameter (Lageparameter)
$\beta > 0 :$ Skalenparameter und $m > 0 :$ Formparameter

Bemerkung: Ist $\alpha = 0$, so spricht man von der 2-parametrigen Weibullverteilung.

Dichtefunktion:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{m}{\beta}\left(\frac{t-\alpha}{\beta}\right)^{m-1} \exp\left(-\left(\frac{t-\alpha}{\beta}\right)^m\right) & : t > \alpha \\ 0 & : t \le \alpha \end{cases}$$

Verteilungsfunktion:

$$F(t) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\left(\frac{t-\alpha}{\beta}\right)^m\right) & : t > \alpha \\ 0 & : t \le \alpha \end{cases}$$

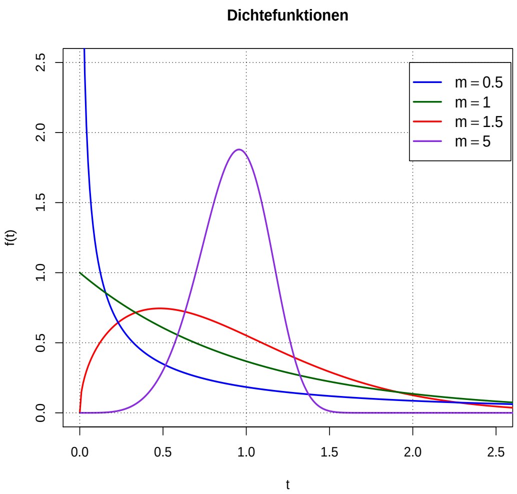
Kenngrößen:

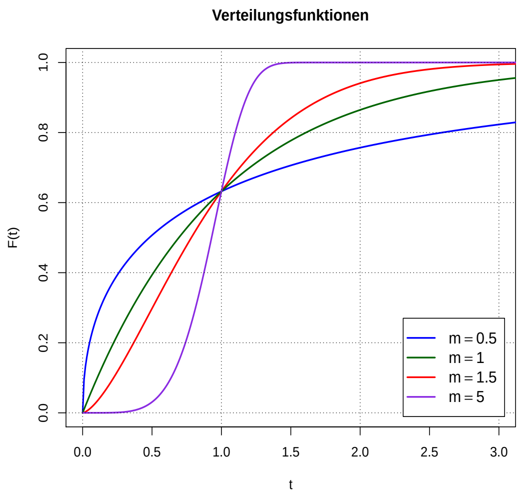
$$\text{Median}(X) = \alpha + \beta \cdot (\ln 2)^{\frac{1}{m}} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{E}X = \alpha + \beta \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right)$$

$$\mathbf{Var}X = \left(\Gamma\left(1 + \frac{2}{m}\right) - \left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right)\right)^2\right)\beta^2 \qquad \text{mit } \Gamma \text{ der Gammafunktion.}$$

Anwendung: In der mechanischen Verfahrenstechnik findet die Weibull-Verteilung Anwendung als eine spezielle Partikelgrößenverteilung. Hier wird sie auch als RRSB-Verteilung (nach Rosin, Rammler, Sperling und Bennet) bezeichnet. Eine Weibullverteilung kann als Grenzverteilung für das Minimum einer großen Zahl von unabhängigen Zufallsgrößen auftreten (Verteilung des schwächsten Kettengliedes), deshalb sind Lebensdauern von Sytemen oft weibullverteilt.

Beispiele: $X \sim \mathbf{Wei}(0, 1, m)$





Fréchet-Verteilung

Bezeichnung: $X \sim \mathbf{Fre}(\alpha, \beta, m)$.

Parameter:
α : Verschiebungsparameter (Lageparameter)
$\beta > 0$: Skalenparameter
$m > 0$: Formparameter

Dichtefunktion:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{m}{\beta}\left(\frac{t-\alpha}{\beta}\right)^{-(m+1)} \exp\left(-(\frac{t-\alpha}{\beta})^{-m}\right) & : t > \alpha \\ 0 & : t \leq \alpha \end{cases}$$

Verteilungsfunktion:

$$F(t) = \begin{cases} \exp\left(-(\frac{t-\alpha}{\beta})^{-m}\right) & : t > \alpha \\ 0 & : t \leq \alpha \end{cases}$$

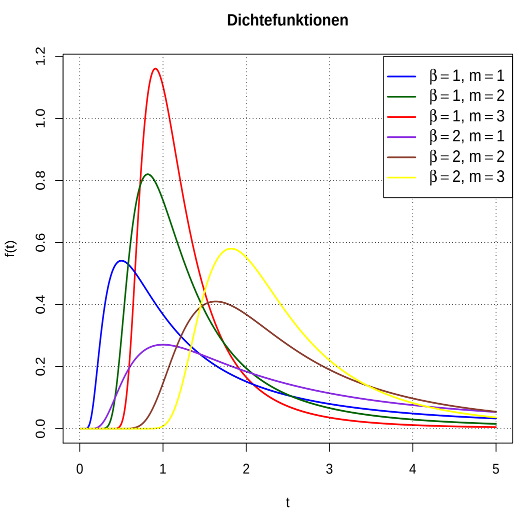
Kenngrößen: (mit Γ der Gammafunktion)

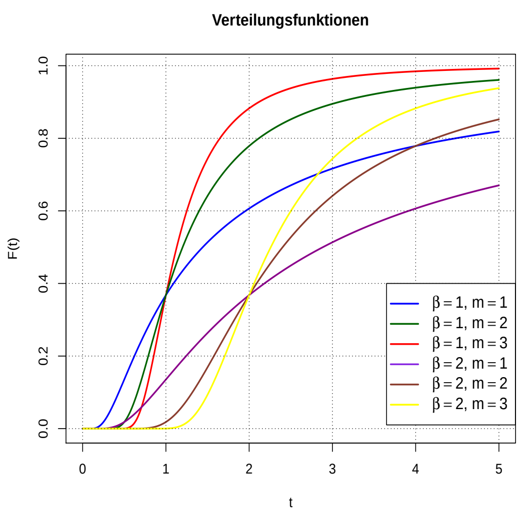
$$\text{Median}(X) = \alpha + \beta \cdot \left(\frac{1}{\ln 2}\right)^{\frac{1}{m}} \quad \text{und} \quad \mathbf{E}X = \begin{cases} \alpha + \beta \cdot \Gamma\left(1 - \frac{1}{m}\right) & : m > 1 \\ \infty & : \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathbf{Var}X = \begin{cases} \left(\Gamma\left(1 - \frac{2}{m}\right) - \left(\Gamma\left(1 - \frac{1}{m}\right)\right)^2\right)\beta^2 & : m > 2 \\ \infty & : \text{sonst} \end{cases}$$

Anwendung: Als eine Extremwertverteilung ist sie eine wichtige Verteilung zur Bestimmung von Risiken in der Finanzstatistik.

Beispiele: $X \sim \mathbf{Fre}(0, \beta, m)$





Gumbel-Verteilung

Bezeichnung: $X \sim \mathbf{Gum}(\alpha, \beta)$.

Parameter: α : Verschiebungsparameter (Lageparameter)
$\beta > 0$: Skalenparameter

Dichtefunktion:

$$f(t) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{t-\alpha}{\beta}} e^{-e^{-\frac{t-\alpha}{\beta}}}$$

Verteilungsfunktion:

$$F(t) = e^{-e^{-\frac{t-\alpha}{\beta}}}$$

Kenngrößen:

$$\mathbf{E}X = \alpha + \beta\gamma \qquad \text{mit } \gamma \approx 0,5772 \text{ der Euler-Mascheroni-Konstante.}$$

$$\text{Median}(X) = \alpha - \beta \ln(\ln(2)) \qquad \text{und} \qquad \mathbf{Var}X = \frac{\beta^2 \pi^2}{6}$$

Anwendung: Als eine Extremwertverteilung z.B. in:
- der Wasserwirtschaft (für extreme Ereignisse wie Hochwasser und Trockenzeiten),
- der Verkehrsplanung,
- der Meteorologie,
- der Hydrologie.

Beispiele: $X \sim \mathbf{Gum}(\alpha, \beta)$