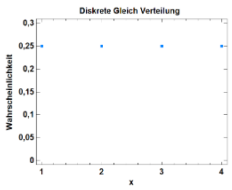
Diskrete Verteilungen

(aus Formelsammlung – Statistik für Betriebswirte)

Diskrete Gleichverteilung

$X \sim \mathbf{U}(\{1,2,3,4\})$



Eine Menge $\mathcal{M}$ besteht aus n Elemente, die alle gleichwahrscheinlich sind.

Einzelwahrscheinlichkeit:

$$P(X = k) = \frac{1}{n} \quad \text{für } k \in \mathcal{M} \qquad (\text{Bez.}: X \sim \mathbf{U}(\mathcal{M})).$$

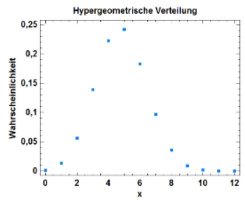
Momente für $X \sim \mathbf{U}(\{1,2,\dots,n\})$:

$$\mathbf{E}X = \frac{n+1}{2} \quad \text{und} \quad \mathbf{Var}X = \frac{n^2-1}{12}$$

Anwendung: Laplace-Experiment

Hypergeometrische Verteilung

$X \sim \mathbf{Hyp}(100, 40, 12)$



Eine Menge besteht aus N Elementen. Dabei gibt es M von der Sorte 1 und $N-M$ von der Sorte 2. Aus der Menge werden n Stück (durch einmaliges Ziehen oder durch Ziehen ohne Zurücklegen) gezogen. Die Zufallsgröße X ist die Anzahl der Stücke von Sorte 1 unter den Gezogenen.

Einzelwahrscheinlichkeit:

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad k = \max(0, n-(N-M)), \dots, \min(n, M) \quad (X \sim \mathbf{Hyp}(N, M, n)).$$

Momente:

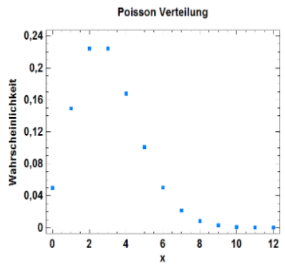
$$\mathbf{E}X = n \cdot \frac{M}{N} \quad \text{und} \quad \mathbf{Var}X = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \frac{N-M}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

Eigenschaften: Für $N \to \infty, M \to \infty$ und $\frac{M}{N} = p$ Übergang in eine Binomialverteilung.

Anwendung: Sichprobennahme ohne Zurücklegen, Qualitätskontrolle

Poissonverteilung

$X \sim \mathbf{Poi}(3)$



Einzelwahrscheinlichkeit:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \quad \lambda > 0, k = 0, 1, \dots \qquad (\text{Bez.}: X \sim \mathbf{Poi}(\lambda)).$$

Momente:

$$\mathbf{E}X = \lambda \quad \text{und} \quad \mathbf{Var}X = \lambda$$

Eigenschaften: Die Summe unabhängiger poissonverteilter Zufallsgrößen ist poissonverteilt: $X_i \sim \mathbf{Poi}(\lambda_i) \quad i = 1, \dots, m \implies \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathbf{Poi}(\lambda) \quad \text{mit } \lambda = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$.

Anwendung: Verteilung „seltener“ Ereignisse, Bedienungstheorie, Qualitätskontrolle, Schadenzahlverteilung in der Versicherungsmathematik

Bernoulli-Verteilung

Bernoulli-Experiment: Experiment mit 2 möglichen Versuchsausgängen A oder $\overline{A}$.
Das Ereignis A tritt dabei mit einer Wahrscheinlichkeit $p = P(A)$ ein.
Tritt das Ereignis A ein, dann ist die Zufallgröße X gleich 1 und sonst gleich 0.

Einzelwahrscheinlichkeit:

$$P(X = 1) = p \quad \text{und} \quad P(X = 0) = 1 - p \qquad (\text{Bez.}: X \sim \mathbf{B}(p)).$$

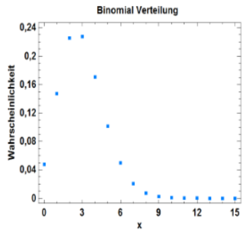
Momente:

$$\mathbf{E}X = p \quad \text{und} \quad \mathbf{Var}X = p \cdot (1-p)$$

Eigenschaften: Die Summe unabhängiger und identisch bernoulliverteilter Zufallsgrößen ist Binomialverteilt: $X_i \sim \mathbf{B}(p) \quad i = 1, \dots, n \implies \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathbf{Bin}(n, p)$.

Binomialverteilung

$X \sim \mathbf{Bin}(100, 0.03)$



Es werden n unabhängige Bernoulli-Experimente durchgeführt. Die Zufallsgröße X ist gleich der Anzahl, wie oft das Ereignis A eintritt.

Einzelwahrscheinlichkeit:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad k = 0, 1, \dots, n \qquad (\text{Bez.}: X \sim \mathbf{Bin}(n, p)).$$

Momente:

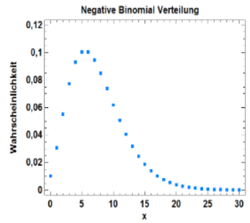
$$\mathbf{E}X = n \cdot p \quad \text{und} \quad \mathbf{Var}X = n \cdot p \cdot (1-p)$$

Eigenschaften: Für $n \to \infty, p \to 0$ und $n \cdot p = \lambda$ Übergang in eine Poissonverteilung

Anwendung: unabhängige Wiederholung von Versuchen, Stichprobennahme mit Zurücklegen, Qualitätskontrolle, Schadenzahlverteilung in der Versicherungsmathematik

Negative Binomialverteilung

$X \sim \mathbf{NegBin}(5, 0.4)$



Es werden unabhängige Bernoulli-Experimente solange durchgeführt bis zum r-ten mal das Ereignis A eingetreten ist. Die Zufallsgößе X ist gleich der Anzahl der Versuche.

Einzelwahrscheinlichkeit:

$$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r} \quad k = r, r+1 \dots \qquad (\text{Bez.}: X \sim \mathbf{NegBin}(r, p)).$$

Momente:

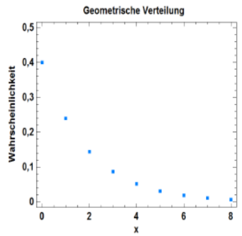
$$\mathbf{E}X = \frac{r}{p} \quad \text{und} \quad \mathbf{Var}X = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

Anwendung: Schadenzahlverteilung in der Versicherungsmathematik

Alternative Definition:
Die Zufallsgöße Y ist gleich der Anzahl der Versuchsausgänge $\overline{A}$.
Also ist $P(Y = k) = P(X = k + r) \quad k = 0, 1 \dots$ und damit $\mathbf{E}Y = \mathbf{E}X - r = \frac{r(1-p)}{p}$.

Geometrische Verteilung

$X \sim \mathbf{Geo}(0.4)$



Es werden unabhängige Bernoulli-Experimente solange durchgeführt bis zum ersten Mal das Ereignis A eingetreten ist. Die Zufallsgöße X ist gleich der Anzahl der Versuche. (Spezialfall der Negativ-Binomialverteilung mit $r = 1$.)

Einzelwahrscheinlichkeit:

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1} \quad k = 1, \dots \qquad (\text{Bez.}: X \sim \mathbf{Geo}(p)).$$

Momente:

$$\mathbf{E}X = \frac{1}{p} \quad \text{und} \quad \mathbf{Var}X = \frac{1-p}{p^2}$$

Eigenschaften: Verteilung „ohne Gedächtnis“ $(P(X = n + k | X > n) = P(X = k))$.
Anwendung: Lauflänge bei Kontrollkarten (erwartete Lauflänge: ARL)