

2.2 Wichtige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

2.2.1 Diskrete Verteilungen

Diskrete Gleichverteilung

Eine Menge \mathcal{M} besteht aus n Elemente, die alle gleichwahrscheinlich sind.

Einzelwahrscheinlichkeit:

$$P(X = k) = \frac{1}{n} \quad \text{für } k \in \mathcal{M} \quad (\text{Bez.: } X \sim \mathbf{U}(\mathcal{M})).$$

Momente für $X \sim \mathbf{U}(\{1, 2, \dots, n\})$:

$$\mathbf{E}X = \frac{n+1}{2} \quad \text{und} \quad \mathbf{Var}X = \frac{n^2-1}{12}$$

Anwendung: Laplace-Experiment

Hypergeometrische Verteilung

Eine Menge besteht aus N Elementen. Dabei gibt es M von der Sorte 1 und $N - M$ von der Sorte 2. Aus der Menge werden n Stück (durch einmaliges Ziehen oder durch Ziehen ohne Zurücklegen) gezogen. Die Zufallsgröße X ist die Anzahl der Stücke von Sorte 1 unter den Gezogenen.

Einzelwahrscheinlichkeit:

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad k = \max(0, n-(N-M)), \dots, \min(n, M) \quad (X \sim \mathbf{Hyp}(N, M, n)).$$

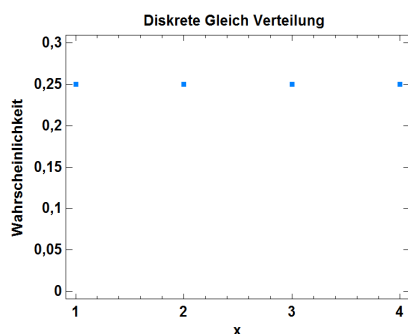
Momente: $\mathbf{E}X = n \cdot \frac{M}{N}$ und $\mathbf{Var}X = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \frac{N-M}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1}$

Eigenschaften: Für $N \rightarrow \infty, M \rightarrow \infty$ und $\frac{M}{N} = p$ Übergang in eine Binomialverteilung.

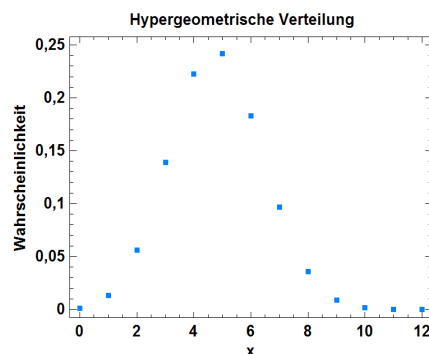
Anwendung: Stichprobennahme ohne Zurücklegen, Qualitätskontrolle

Beispiele:

$$X \sim \mathbf{U}(\{1, 2, 3, 4\})$$



$$X \sim \mathbf{Hyp}(100, 40, 12)$$



Bernoulli-Verteilung

Bernoulli-Experiment: Experiment mit 2 möglichen Versuchsausgängen A oder A^c . Das Ereignis A tritt dabei mit einer Wahrscheinlichkeit $p = P(A)$ ein. Tritt das Ereignis A ein, dann ist die Zufallsgröße X gleich 1 und sonst gleich 0.

Einzelwahrscheinlichkeit:

$$P(X = 1) = p \quad \text{und} \quad P(X = 0) = 1 - p \quad (\text{Bez. : } X \sim \mathbf{B}(p)).$$

Momente:

$$\mathbf{E}X = p \quad \text{und} \quad \mathbf{Var}X = p \cdot (1 - p)$$

Eigenschaften: Die Summe unabhängiger und identisch bernoullivertelter Zufallsgrößen ist Binomialverteilt: $X_i \sim \mathbf{B}(p) \quad i = 1, \dots, n \implies \sum_{i=1}^n X_i \sim \mathbf{Bin}(n, p)$.

Binomialverteilung

Es werden n unabhängige Bernoulli-Experimente durchgeführt. Die Zufallsgröße X ist gleich der Anzahl, wie oft das Ereignis A eintritt.

Einzelwahrscheinlichkeit:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (\text{Bez. : } X \sim \mathbf{Bin}(n, p)).$$

Momente:

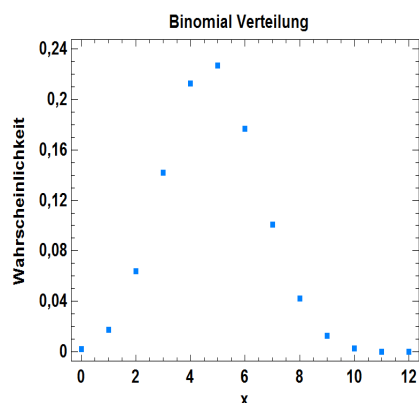
$$\mathbf{E}X = n \cdot p \quad \text{und} \quad \mathbf{Var}X = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

Eigenschaften: Für $n \rightarrow \infty, p \rightarrow 0$ und $n \cdot p = \lambda$ Übergang in eine Poissonverteilung

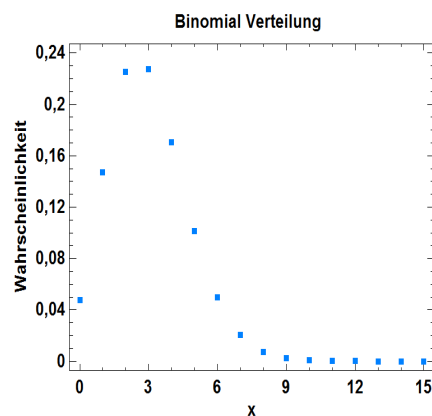
Anwendung: unabhängige Wiederholung von Versuchen, Stichprobennahme mit Zurücklegen, Qualitätskontrolle, Schadenzahlverteilung in der Versicherungsmathematik

Beispiele:

$$X \sim \mathbf{Bin}(12, 0.4)$$



$$X \sim \mathbf{Bin}(100, 0.03)$$



Poissonverteilung

Einzelwahrscheinlichkeit:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \quad \lambda > 0, k = 0, 1, \dots \quad (\text{Bez. : } X \sim \mathbf{Poi}(\lambda)).$$

Momente:

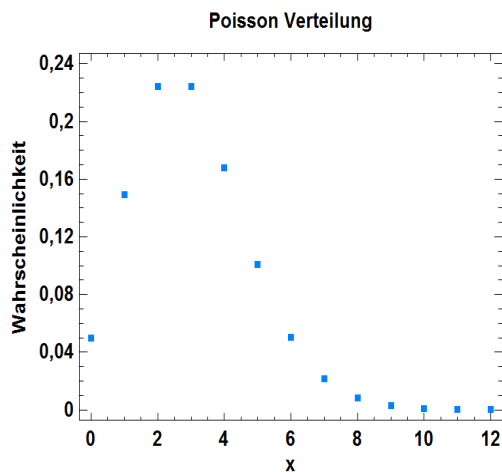
$$\mathbf{E}X = \lambda \quad \text{und} \quad \mathbf{Var}X = \lambda$$

Eigenschaften: Die Summe unabhängiger poissonverteilter Zufallsgrößen ist poissonverteilt: $X_i \sim \mathbf{Poi}(\lambda_i) \quad i = 1, \dots, m \implies \sum_{i=1}^m X_i \sim \mathbf{Poi}(\lambda) \quad \text{mit} \quad \lambda = \sum_{i=1}^m \lambda_i.$

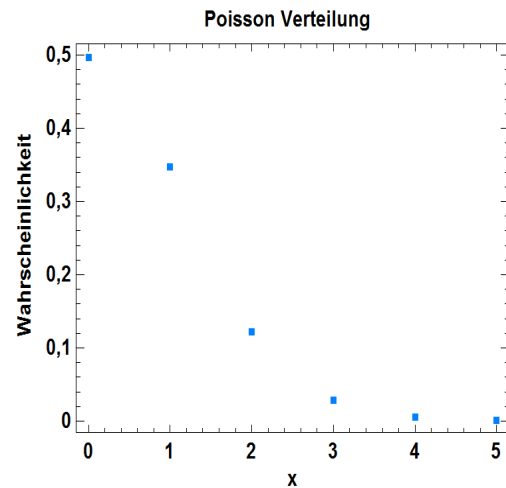
Anwendung: Verteilung „seltener“ Ereignisse, Bedienungstheorie, Qualitätskontrolle, Schadenzahlverteilung in der Versicherungsmathematik

Beispiele:

$$X \sim \mathbf{Poi}(3)$$



$$X \sim \mathbf{Poi}(0.7)$$



Negative Binomialverteilung

Es werden unabhängige Bernoulli-Experimente solange durchgeführt bis zum r -ten mal das Ereignis A eingetreten ist. Die Zufallsgröße X ist gleich der Anzahl der Versuche.

Einzelwahrscheinlichkeit:

$$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r} \quad k = r, r+1, \dots \quad (\text{Bez. : } X \sim \mathbf{NegBin}(r, p)).$$

Momente:

$$\mathbf{E}X = \frac{r}{p} \quad \text{und} \quad \mathbf{Var}X = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

Anwendung: Schadenzahlverteilung in der Versicherungsmathematik

Alternative Definition:

Die Zufallsgröße Y ist gleich der Anzahl der Versuchsausgänge A^c .

Also ist $P(Y = k) = P(X = k + r) \quad k = 0, 1, \dots$ und damit $\mathbf{E}Y = \mathbf{E}X - r = \frac{r(1-p)}{p}$.

Geometrische Verteilung

Es werden unabhängige Bernoulli-Experimente solange durchgeführt bis zum ersten Mal das Ereignis A eingetreten ist. Die Zufallsgröße X ist gleich der Anzahl der Versuche. (Spezialfall der Negativ-Binomialverteilung mit $r = 1$.)

Einzelwahrscheinlichkeit:

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1} \quad k = 1, \dots \quad (\text{Bez. : } X \sim \mathbf{Geo}(p)).$$

Momente:

$$\mathbf{E}X = \frac{1}{p} \quad \text{und} \quad \mathbf{Var}X = \frac{1-p}{p^2}$$

Eigenschaften: Verteilung „ohne Gedächtnis“ ($P(X = n + k | X > n) = P(X = k)$).

Anwendung: Lauflänge bei Kontrollkarten (erwartete Lauflänge: ARL)

Beispiele:

$$X \sim \mathbf{NegBin}(5, 0.4)$$

$$X \sim \mathbf{Geo}(0.4)$$

