Übung 3.
Aufgabe 3.

A - "Versicherungsfall tritt ein"
$P(A) = p = 0,005$
$n = 600$
$X-$ zufällige Anzahl der Personen, bei denen der Versicherungsfall eintritt.
Einnahmen: 600€ $\cdot$ 10 = 6000€
Auszahlung: 1500€ $\cdot X$
Gewinn: $G = 6000€ - 1500€ \cdot X$

a)
$X \sim Bin(600; 0,005)$ (binomialverteilt).
Ob die Poissonverteilung gut zur Approximation von Binomialverteilung geeignet, sollte man noch Faustregel (Kapitel 3 Folie 40) überprüfen:
$n = 600 > 30$ – erfüllt;
$p = 0,005 < 0,05$ – erfüllt;
$np = 3 < 10$ – erfüllt $\rightarrow$ Poissonverteilung ist möglich.

b)
i. $P(\text{"}Mit \quad Verlust \quad arbeitet\text{"}) = P(G < 0)$

$$= P(6000 - 1500 \cdot X < 0) = P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4)$$

$$= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)]$$

$$= 1 - \left[\frac{3^0}{0!}e^{-3} + \frac{3^1}{1!}e^{-3} + .. + \frac{3^4}{4!}e^{-3}\right] \approx \mathbf{0{,}1847}.$$

Exakt mit Binomialverteilung: 0,1843.
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Versicherungsgeselschaft mit einem Verlust arbeitet, beträgt ca. 0,1847.

ii. $P(\text{"}Mindestgewinn \quad von \quad 2000 \quad Euro\text{"}) = P(G \geq 2000)$

$$= P(6000 - 1500 \cdot X \geq 2000) = P(X \leq 2,67) = P(X \leq 2)$$

$$= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$= \frac{3^0}{0!}e^{-3} + \frac{3^1}{1!}e^{-3} + \frac{3^2}{2!}e^{-3} = e^{-3}\left[\frac{1}{0!} + \frac{3}{1!} + \frac{9}{2!}\right] \approx \mathbf{0{,}4232}.$$

Exakt mit Binomialverteilung: 0,4225.
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Versicherungsgeselschaft einen Mindestgewinn von 2000 Euro erzielt, beträgt ca. 0,4232.

$c)$
L – zufällige jährliche Versicherungsleistung
$L = 1500€ \cdot X$

$EX = \lambda = n \cdot p = 3.$
$VarX = \lambda = n \cdot p = 3.$
$E(aX + b) = a \cdot EX + b$
$Var(aX + b) = a^2 \cdot VarX$

Erwartete jährliche Versicherungsleistung:
$EL = E[1500 \cdot X] = 1500 \cdot EX = 1500 \cdot 3 = 4500€.$
Varianz:
$VarL = Var[1500 \cdot X] = 1500^2 \cdot VarX = 1500^2 \cdot 3 = 6750000€^2$
Standartabweichung:
$\sigma_L = \sqrt{VarL} = 2598,08€.$
$d)$
Erwartete Gewinn:
$EG = E[6000 - 1500 \cdot X] = 6000 - 1500 \cdot EX = 6000 - 1500 \cdot 3 = 1500€.$
Varianz:
$VarG = Var[6000 - 1500 \cdot X] = 1500^2 \cdot VarX = 6750000€^2.$
Standartabweichung:
$\sigma_G = \sqrt{VarG} = 2598,08€.$

Aufgabe 4.
$a)$
$N = 100$
$M = 5$
$n = 10$
X – zufällige Anzahl der fehlerhafter Bauteile unter den 10 entnommen.
$X \sim Hyp(100; 5; 10)$ (hypergeometrischverteilt)

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$b)$
$$P(\text{"}zwei \quad oder \quad drei \quad fehlerhaft\text{"}) = P(X = 2) + P(X = 3)$$

$$= \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{95}{8}}{\binom{100}{10}} + \frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{95}{7}}{\binom{100}{10}} = \mathbf{0{,}0766}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass 2 oder 3 Einheiten fehlerhaft sind beträgt 0,0766.

$c)$

$EX = n \cdot \frac{M}{N} = 10 \cdot \frac{5}{100} = \mathbf{0{,}5}.$

Die ewartete Anzahl der fehlerhafte Einheiten unter den 10 entnommenen ist 0,5.