7. Übungsserie Statistik für Ingenieure WiSe 19/20: Lösung

4. Aufgabe Bei einem Explorationsprojekt für die Nutzung geothermischer Energien soll eine 3 km tiefe Probebohrung gemacht werden. Ein Bohrkopf kostet 30.000€ und hält durchschnittlich 30m durch, aber das variiert. Der Variationskoeffzient ist 3.
Wie hoch sollte Ihr Budget für Bohrköpfe sein, damit Sie das Bohrprojekt mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% auch bis zu Ende durchführen können?

Lösung: Es gelte die folgende Bezeichnung

$$X \text{ – „zufällige Tiefe eines Bohrkopfes."}$$

Gemäß der Aufgabe gilt

$$\mu_X := \mathbf{E}[X] = 30 \quad \text{(durchschnittliche Bohrlänge in } m\text{)}$$

Desweiteren soll für den Variationskoeffizient gelten

$$V_X = \frac{\sigma_X}{\mathbf{E}[X]} = 3 \implies \sigma_X = 3 \cdot \mathbf{E}[X] = 90 \text{ (in } m\text{)}$$
$$\implies \sigma_X^2 = \mathrm{Var}[X] = 8100 \text{ (in } m^2\text{)}$$

Es sei nun Angenommen, dass n Bohrköpfe zur Verfügung stehen. Die Zufallsgrößen

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

sollen unabhängig sein und die gleiche Verteilung wie X haben ($X_i \sim X$). Sie beschreiben die Anzahl der Meter, mit denen die einzelnen Bohrköpfe, welche zur Verfügung stehen, bohren bevor sie ausfallen. Dann beträgt die Gesammttiefe der Bohrungen

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Um das notwendige Budget bestimmen zu können benötigen wir die kleinste Anzahl der Bohrköpfe n, so dass die folgende Bedingung erfüllt ist.

$$\mathrm{P}(\underbrace{S_n \geq 3000}_{\text{Gesammttiefe ist mindestens 3km}}) \geq 0,99$$

Problem: Es ist nicht bekannt, wie die Zufallsgröße X (und somit auch S_n) exakt verteilt ist.
Lösung: Anwendung des *zentralen Grenzwertsatzes*[1]. Dieser sagt, dass für große n das Folgende gilt.

[1] vgl. z.B. Folien zur Vorlesung, Kapitel 3: „Zufallsgrößen", Folie 59

$$\mathrm{P}\left(S_n < x\right) \approx \Phi\left(\frac{x - n\mu_X}{\sqrt{n\sigma_X^2}}\right) = \Phi\left(\frac{x - 30n}{\sqrt{8100n}}\right) = \Phi\left(\frac{x - 30n}{90\sqrt{n}}\right)$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(S_n \geq 3000) \geq 0,99 &\iff 1 - \mathrm{P}\left(S_n < 3000\right) \geq 0,99 \\
&\iff \mathrm{P}\left(S_n < 3000\right) \approx \Phi\left(\frac{3000 - 30n}{90\sqrt{n}}\right) = \Phi\left(\frac{100 - n}{3\sqrt{n}}\right) \leq 0,01 \\
&\iff \frac{100 - n}{3 \cdot \sqrt{n}} \leq z_{0,01}
\end{aligned}$$

Da $z_{0,01} = -z_{1-0,01} = -z_{0,99} = -2,326$ gilt auch das Folgende.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(S_n \geq 3000) \geq 0,99 &\iff \frac{100 - n}{3 \cdot \sqrt{n}} \leq -2,326 \\
&\iff 100 - n + 6,978\sqrt{n} \leq 0
\end{aligned}$$

Zu lösen ist nun die Gleichung

$$100 - n + 6,978\sqrt{n} = 0. \tag{0–1}$$

Durch die Substitution $y = \sqrt{n}$ und multiplizieren mit -1 erhält man eine quadratische Gleichung.

$$y^2 - 6,978y - 100 = 0.$$

Deren Lösungen y_1 und y_2 lassen sich z.B. mit Hilfe der p-q-Formel bestimmen.

$$\begin{aligned}
& y_{1,2} = \frac{6,978}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-6,978}{2}\right)^2 + 100} \\
\Longrightarrow\ & y_1 = 14,0802 \Longrightarrow \sqrt{n_1} = 14,0802 \Longrightarrow n_1 \approx 198,25 \\
\Longrightarrow\ & y_2 = -7,1 < 0 \Longrightarrow \sqrt{n_2} = -7,1 \Longrightarrow \text{Lösung } n_2 \text{ entfällt} \\
\Longrightarrow\ & n_1 = 198,25 \text{ ist einzigste Lösung der Gleichung (0–1)}
\end{aligned}$$

D.h. damit die erforderlichen 3km mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% gebohrt werden können benötigt man mindestens 199 Bohrköpfe. Das erforderliche Budget sollte also mindestens

$$199 \cdot 30.000€ = 5.970.000€$$

betragen. □