4. Übungsserie Statistik für Ingenieure WiSe 19/20: Lösung

2. Aufgabe Die Zeit X (in Minuten), die ein Fräsvorgang benötigt, wird erfahrungsgemäß durch die folgende Dichte beschrieben:

$$\begin{aligned} f_X(t) &= e^{-(t-10,5)} \cdot I_{[10,5;\infty)}(t) \\ &= \begin{cases} 0 & : t < 10,5 \\ {}^{-(t-10,5)} & : t \geq 10,5 \end{cases} \end{aligned}$$

d) Wie groß ist der Erwartungswert von X?

Lösung: Für die Berechnung des Erwartungswertes wird die Formel der **partiellen Integration** benötigt:

Für zwei stetig differenzierbare Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt

$$\boxed{\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x} \tag{0–1}$$

Hierbei sind f' und g' die einfachen Ableitungen der Funktionen f und g.

Für stetige Zufallsvariablen gilt nun zunächst die allgemeine Formel für den Erwartungswert

$$\boxed{\mathbf{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}x}$$

Da die Dichtefunktion f_X über Fallunterscheidungen definiert ist, berechnen wir das Integral wie folgt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{10,5} x f_X(x)\,\mathrm{d}x + \int_{10,5}^{\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{10,5} x \cdot 0\,\mathrm{d}x}_{=0} + \int_{10,5}^{\infty} x \cdot e^{-(x-10,5)}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{10,5}^{\infty} x \cdot e^{-(x-10,5)}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{y\to\infty} \left(\int_{10,5}^{y} x \cdot e^{-(x-10,5)}\,\mathrm{d}x \right) \end{aligned}$$

Nun wendet man die Formel (0–1) der partiellen Integration mit den Funktionen

$$f(x) = x \qquad \text{und} \qquad g'(x) = e^{-(x-10,5)}$$

an. Einfaches ableiten bzw. Stammfunktion bilden dieser Funktionen ergibt

$$f'(x) = 1 \qquad \text{und} \qquad g(x) = -e^{-(x-10,5)}.$$

Man erhält

$$\begin{aligned}\int_{10,5}^{y} x \cdot e^{-(x-10,5)} \,\mathrm{d}x &= \int_{10,5}^{y} f(x) \cdot g'(x) \,\mathrm{d}x \\ &= f(x)g(x)\Big|_{10,5}^{y} - \int_{10,5}^{y} f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= x \cdot \left(-e^{-(x-10,5)}\right)\Big|_{10,5}^{y} - \int_{10,5}^{y} 1 \cdot \left(-e^{-(x-10,5)}\right) \mathrm{d}x,\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}x \cdot \left(-e^{-(x-10,5)}\right)\Big|_{10,5}^{y} &= -y \cdot e^{-(y-10,5)} - \left(-10,5 \cdot e^{-(10,5-10,5)}\right) \\ &= \underbrace{-y \cdot e^{-(y-10,5)}}_{\xrightarrow{y\to\infty} 0} + 10,5 \\ &\xrightarrow{y\to\infty} 0 + 10,5 = 10,5\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\int_{10,5}^{y} 1 \cdot \left(-e^{-(x-10,5)}\right) \mathrm{d}x &= e^{-(x-10,5)}\Big|_{10,5}^{y} \\ &= e^{-(y-10,5)} - e^{-(10,5-10,5)} \\ &= \underbrace{e^{-(y-10,5)}}_{\xrightarrow{y\to\infty} 0} - 1 \\ &\xrightarrow{y\to\infty} 0 - 1 = -1\end{aligned}$$

Zusammengefasst erhält man

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X] &= \lim_{y\to\infty} \left(\int_{10,5}^{y} x \cdot e^{-(x-10,5)} \,\mathrm{d}x \right) \\ &= \lim_{y\to\infty} \left(x \cdot \left(-e^{-(x-10,5)}\right)\Big|_{10,5}^{y} - \int_{10,5}^{y} 1 \cdot \left(-e^{-(x-10,5)}\right) \mathrm{d}x \right) \\ &= 10,5 - (-1) \\ &= 11,5.\end{aligned}$$

$\square$