1. Lösung weitere Übungsaufgaben Statistik II WiSe 2019/2020

1. Aufgabe: Bei der Produktion eines Werkstückes wurde die Bearbeitungszeit untersucht. Für die als normalverteilt angesehene zufällige Bearbeitungszeit wurden 27 Werte (in min) erfasst. Aus diesen Werten erhält man $\overline{x} = 5{,}7\, min$ und $s = 0{,}418\, min$.

a) Bestimmen Sie eine Konfidenzschätzung für die Varianz der Bearbeitungszeit zum Konfidenzniveau 95%.

b) Bestimmen Sie zum Konfidenzniveau von 95% eine obere Konfidenzgrenze für die erwartete Bearbeitungszeit.

Lösung:

X - zufällige Bearbeitungszeit
$X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \quad i = 1, .., 27,$
$\overline{x} = 5{,}7\, min$ und $s = 0{,}418\, min$.

a) Konfidenzschätzung für die Varianz (der Erwartungswert μ ist unbekannt):

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;\frac{\alpha}{2}}}$$

Konfidenzniveau: $1 - \alpha = 0{,}95 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 0{,}05 \quad \Longrightarrow \quad 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}975.$

$$\chi^2_{n-1;\frac{\alpha}{2}} = \chi^2_{26;\,0{,}025} = 13{,}84 \quad \text{und} \quad \chi^2_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} = \chi^2_{26;\,0{,}975} = 41{,}92$$

$$\begin{aligned} \frac{26 \cdot (0{,}418)^2}{41{,}92} &\leq \sigma^2 \leq \frac{26 \cdot (0{,}418)^2}{13{,}84} \\ \underline{0,10837} &\leq \sigma^2 \leq \underline{0,32824} \end{aligned}$$

b) obere Konfidenzgrenze für den Erwartungswert μ
(die Varianz σ^2 ist unbekannt):

$$\mu \leq \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1;1-\alpha}$$

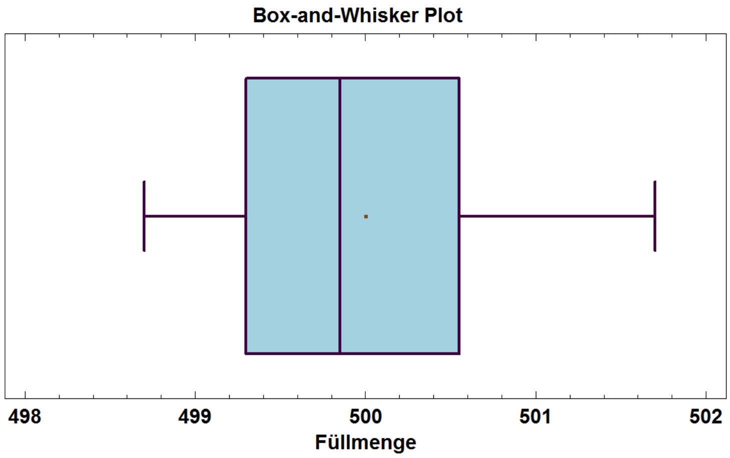
Konfidenzniveau: $1 - \alpha = 0{,}95 \quad \Longrightarrow \quad t_{26;\,0{,}95} = 1{,}71.$

$$\begin{aligned} \mu &\leq 5{,}7 + \frac{0{,}418}{\sqrt{27}} \cdot 1{,}71 \\ \mu &\leq \underline{5{,}84} \end{aligned}$$

---

2. Aufgabe: Eine sächsische Molkerei füllt Milch in Tetrapacks ab. Die Füllmenge ist normalverteilt mit Standardabweichung $\sigma = 1\ ml$. In einer Stichprobe von 12 Tetrapacks wurden folgende Füllmengen gemessen:

499,7	501,3	499,1	500,6	500,2	499,5
500,0	499,1	500,5	499,6	498,7	501,7



a) Bestimmen Sie zum Konfidenzniveau von 99 % ein zentrales Konfidenzintervall für die erwartete Füllmenge.

b) Wie groß muss n mindestens sein, damit die Länge des 99 % Konfidenzintervalles höchstens 0,5 ml ist?

Lösung:
X - zufällige Füllmenge
$X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \quad i = 1, .., 12,$

a) Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ
(die Varianz $\sigma^2 = (1\ ml)^2$ ist bekannt):

$$\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \quad \mu \quad < \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$1 - \alpha = 0{,}99 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 0{,}01 \quad \Longrightarrow \quad z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}995} = 2{,}5758$$

$\sigma = 1\ ml$, $n = 12$ und $\overline{x} = 500\ ml$.

$$500 - \frac{1}{\sqrt{12}} \cdot 2{,}5758 < \quad \mu \quad < 500 + \frac{1}{\sqrt{12}} \cdot 2{,}5758$$

$$\underline{499{,}26} < \quad \mu \quad < \underline{500{,}74}$$

b)

$$l = 2 \cdot d = 0{,}5 \qquad \Longrightarrow \qquad d = 0{,}25.$$

$$n \geq \left(\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{d}\right)^2 \cdot \sigma^2 = \left(\frac{2{,}5758}{0{,}25}\right)^2 \cdot 1^2 = \underline{106{,}156}$$

Der Stichprobenumfang muss mindestens 107 betragen.

---

3. Aufgabe:

Ein Manager einer großen Einzelhandelskette soll der Firmenleitung von der Erfahrung mit dem „Just-In-Time“ -Projekt berichten. Die Filialen seines Gebiets wurden im letzten Monat 1000mal angesteuert. Dabei gab es in 72 Fällen Verspätungen.

Geben Sie für die Wahrscheinlichkeit, dass es bei einer Lieferung zu einer Verspätung kommt, eine obere Konfidenzgrenze zum Konfidenzniveau 90% an!

Lösung:

$$X_i = \begin{cases} 1 & : \text{ falls Verspätung bei der } i\text{-ten Lieferung,} \\ 0 & : \text{ falls keine Verspätung bei der } i\text{-ten Lieferung.} \end{cases}$$

$p = P(X_i = 1)$ - (unbekannte) Wahrscheinlichkeit für Verspätung.

$X_i \sim \mathbf{B}(p), \quad i = 1, .., 1000,$
$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ - zufällige Anzahl der Verspätungen bei $n = 1000$ unabhängigen Lieferungen.

$n \cdot \hat{p} = 1000 \cdot \frac{72}{1000} = 72 > 5$ und $n \cdot (1 - \hat{p}) = 1000 \cdot (1 - \frac{72}{1000}) = 928 > 5 \quad \Longrightarrow$
Die Faustregel ist erfüllt und damit kann die die (approximative) Konfidenzgrenze verwendet werden.

obere Konfidenzgrenze für die Wahrscheinlichkeit (bzw. den Anteil) p:

$$p \;\leq\; \frac{1}{n + z_{1-\alpha}^2} \left(X + \frac{1}{2} z_{1-\alpha}^2 + z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{X(n-X)}{n} + \frac{1}{4} z_{1-\alpha}^2} \right)$$

Konfidenzniveau: $1 - \alpha = 0{,}9 \quad \Longrightarrow \quad z_{0,9} = 1{,}2816.$

Bei $n = 1000$ Lieferungen wurden $x = 72$ beobachtet.

$$\begin{aligned} p \;&\leq\; \frac{1}{1000 + 1{,}2816^2} \left(72 + \frac{1}{2} \cdot 1{,}2816^2 + 1{,}2816 \sqrt{\frac{72 \cdot (1000 - 72)}{1000} + \frac{1}{4} \cdot 1{,}2816^2} \right) \\ p \;&\leq\; 0{,}08319 \end{aligned}$$

$$\underline{p \leq 8{,}3\%}$$

---

4. Aufgabe: Reagenzgläser sollen bezüglich ihrer Schmelztemperatur untersucht werden. Aus der Tagesproduktion wurden zufällig und unabhängig voneinander 10 Reagenzgläser entnommen. Von diesen 10 Gläsern wurden die Schmelztemperaturen bestimmt. Der Mittelwert dieser 10 Werte ist $\overline{x} = 748{,}2$ und die empirische Varianz $s^2 = 15{,}6$. Die zufällige Schmelztemperatur ist normalverteilt.

a) Bestimmen Sie ein zentrales Konfidenzintervall für die erwartete Schmelztemperatur beim Konfidenzniveau von 99%.

b) Bestimmen Sie zum Konfidenzniveau von 95% eine untere Konfidenzschranke für die Varianz der zufälligen Schmelztemperatur.

Lösung:

X - zufällige Schmelztemperatur
$X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \quad i = 1, .., 10,$
$\overline{x} = 748{,}2$ und $s^2 = 15{,}6$.

a) zentrales Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ
(die Varianz σ^2 ist unbekannt):

$$\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} \leq \mu \leq \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$$

Konfidenzniveau: $1 - \alpha = 0{,}99 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 0{,}01 \quad \Longrightarrow \quad 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}995.$

$$t_{9;\,0{,}995} = 3{,}25$$

$$\begin{aligned} 748{,}2 - \sqrt{\frac{15{,}6}{10}} \cdot 3{,}25 \leq \ & \mu \leq 748{,}2 + \sqrt{\frac{15{,}6}{10}} \cdot 3{,}25 \\ \underline{744{,}14} \leq \ & \mu \leq \underline{752{,}26} \end{aligned}$$

b) untere Konfidenzschranke für die Varianz σ^2
(der Erwartungswert μ ist unbekannt):

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;1-\alpha}} \leq \sigma^2$$

Konfidenzniveau: $1 - \alpha = 0{,}95 \quad \Longrightarrow \quad \chi^2_{n-1;1-\alpha} = \chi^2_{9;\,0{,}95} = 16{,}92$

$$\begin{aligned} \frac{9 \cdot 15{,}6}{16{,}92} &\leq \sigma^2 \\ \underline{8{,}3} &\leq \sigma^2 \end{aligned}$$
