14. Lösung weitere Übungsaufgaben Statistik II WiSe 2019/2020

1. Aufgabe: Es sollen Werkstücke mit einem Durchmesser von 150 mm produziert werden. Es ist davon auszugehen, dass der Durchmesser normalverteilt ist und die Varianz 0,09 mm^2 beträgt. Durch eine Mittelwertkarte soll gesichert werden, dass der Durchmesser der Werkstücke eingehalten wird. Der Stichprobenumfang soll dabei immer 16 sein.

a) Bestimmen Sie die Kontrollgrenzen.

b) Die letzte Prüfung ergab $\overline{x}$ =150,3 mm. Muss in den Produktionsprozess eingegriffen werden?

c) Der Erwartungswert des Durchmessers ist μ =150,15 mm. Wie groß ist die erwartete Lauflänge, bis diese Abweichung erkannt wird?

Lösung: In dieser Aufgabe betrachten wir das Merkmal

$$X \ldots \text{zufällige Durchmesser}$$

Es wird vorausgesetzt, dass $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ist.

a) Sollwert: $a = 150\,mm$, Varianz: $\sigma^2 = 0{,}09\,mm^2$ und $n = 16$
$\alpha = 0,01$, $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0,995} = 2{,}576$

$$\text{untere Kontrollgr.: } K_u = a - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 150 - 2{,}576 \cdot \frac{0{,}3}{4} = 150 - 0{,}1932 = \underline{149{,}8068}$$

$$\text{obere Kontrollgr.: } K_o = a + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 150 + 2{,}576 \cdot \frac{0{,}3}{4} = 150 + 0{,}1932 = \underline{150{,}1932}$$

b) $\overline{x} = 150{,}3 > 150{,}1932 \implies H_0 : \mu = a$ wird abgelehnt. Es gibt also signifikante Abweichungen vom Sollwert a und es muss eingegriffen werden.

c)

$$\mu = 150,15 \implies \delta = \frac{\mu - a}{\sigma} = \frac{150{,}15 - 150}{0{,}3} = 0{,}5$$

Eingriffswahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} g(\mu) = g_1(\delta) &= \Phi\left(\delta\sqrt{n} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) + \Phi\left(-\delta\sqrt{n} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \\ &= \Phi\left(0{,}5\sqrt{16} - 2{,}576\right) + \Phi\left(-0{,}5\sqrt{16} - 2{,}576\right) \\ &= \Phi(-0{,}576) + \Phi(-4{,}576) \\ &\approx 1 - \Phi(0{,}58) + 1 - \Phi(4{,}58) \\ &= 1 - 0{,}719 + 1 - 1 \\ &= 0{,}281 \end{aligned}$$

$$\mathbf{E}N = \frac{1}{p} = \frac{1}{g_1(0{,}5)} = \frac{1}{0{,}281} = \underline{3{,}56}$$

D.h. im Mittel dauert es 3,56 Prüfungen (Tests) bis die Abweichung vom Sollwert erkannt wird.

2. Aufgabe: Eine Firma produziert eine bestimmte Sorte Schrauben. Durch eine Mittelwertkarte soll gesichert werden, dass die Länge der Schrauben eingehalten wird. Es ist davon auszugehen, dass die Länge der Schrauben normalverteilt ist. Der Sollwert der Länge ist $7\,cm$. Weiter ist bekannt, dass die Standardabweichung $0{,}3\,cm$ beträgt. Zu den Entnahmezeitpunkten ist der Stichprobenumfang jeweils 9.

a) Bestimmen Sie die Kontrollgrenzen.

b) Die letzten 3 Prüfungen ergaben folgende Mittelwerte:

$$\overline{x}_1 = 7{,}2\,cm, \qquad \overline{x}_2 = 7{,}18\,cm \quad \text{und} \quad \overline{x}_3 = 7{,}3\,cm$$

Zeichnen Sie die Kontrollkarte und tragen Sie die Punkte ein. Wie lauten die jeweiligen Entscheidungen?

c) Die produzierten Stücke haben einen Erwartungswert $\mu = 6{,}94\,cm$.
Wie groß ist die erwartete Lauflänge, bis diese Abweichung erkannt wird?

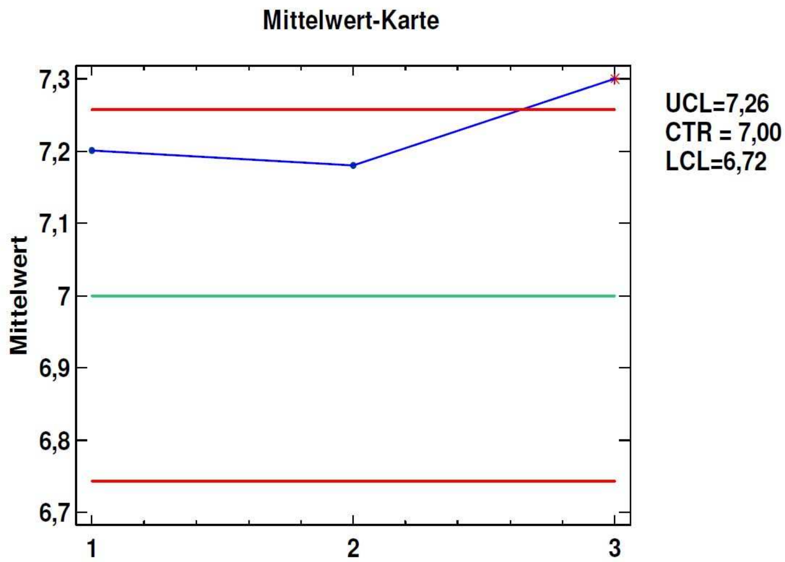
Lösung: In dieser Aufgabe betrachten wir die zufällige Länge X. ($X \sim N(\mu, \sigma^2)$)

a) Sollwert: $a = 7\,cm$, Standardabweichung: $\sigma = 0{,}3\,cm$ und $n = 9$
$\alpha = 0,01$, $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}995} = 2{,}576$

$$\text{untere Kontrollgr.: } K_u = a - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 7 - 2{,}576 \cdot \frac{0{,}3}{3} = \underline{6{,}74}$$

$$\text{obere Kontrollgr.: } K_o = a + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 7 + 2{,}576 \cdot \frac{0,3}{3} = \underline{7{,}26}$$

b) $\overline{x}_1$ und $\overline{x}_2$ liegen innerhalb der Kontrollgrenzen $\Longrightarrow$ $H_0 : \mu = 7$ wird angenommen und es ist kein Eingriff notwendig.
$\overline{x}_3 = 7{,}3 > 7{,}26 = K_o$, d.h. $\overline{x}_3$ liegt oberhalb der oberen Kontrollgrenze $\Longrightarrow$ $H_0 : \mu = 7$ wird abgelehnt und es muss eingegriffen werden. Es gibt signifikante Abweichungen vom Sollwert $a = 7\,cm$.



c)

$$\mu = 6{,}94 \quad \Longrightarrow \quad \delta = \frac{\mu - a}{\sigma} = \frac{6{,}94 - 7}{0{,}3} = -0{,}2$$

Eingriffswahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned}
g(\mu) = g_1(\delta) &= \Phi\left(\delta\sqrt{n} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) + \Phi\left(-\delta\sqrt{n} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \\
&= \Phi\left(-0{,}2\sqrt{9} - 2{,}576\right) + \Phi\left(0{,}2\sqrt{9} - 2{,}576\right) \\
&\approx \Phi(-3{,}2) + \Phi(-1{,}98) \\
&= 1 - \Phi(3{,}2) + 1 - \Phi(1{,}98) \\
&= 1 - 0{,}999 + 1 - 0{,}976 \\
&= 0{,}025
\end{aligned}$$

$$\mathbf{E}N = \frac{1}{p} = \frac{1}{g_1(-0{,}2)} = \frac{1}{0{,}025} = \underline{40}$$

D.h. im Mittel dauert es 40 Prüfungen (Tests) bis die Abweichung vom Sollwert erkannt wird.

---

3. Aufgabe: Eine Abfüllmaschine füllt Bier zu je 500 ml Flaschen ab. Die abgefüllte Menge ist normalverteilt mit Standardabweichung 1,5 ml. Mit Hilfe einer Mittelwertkarte soll überprüft werden, ob der Sollwert von 502 ml eingehalten wird. Zu jedem Entnahmezeitpunkt wird eine Stichprobe vom Umfang $n = 4$ Flaschen entnommen.

a) Berechnen Sie die Kontrollgrenzen.

b) Die letzten 3 Stichproben ergaben folgende Werte in ml:

t	x_{t1}	x_{t2}	x_{t3}	x_{t4}
1	501,0	500,8	499,8	503,0
2	503,4	502,3	503,3	502,5
3	500,9	501,5	503,1	504,1

Treffen Sie die jeweiligen Kontrollentscheidungen. Sie können auf die Zeichnung der Kontrollkarte verzichten.

c) Die erwartete abgefüllte Menge ist 499 ml.
Wie groß ist die erwartete Lauflänge bis diese Abweichung erkannt wird?

Lösung:

In dieser Aufgabe betrachten wir das Merkmal

$$X \ldots \text{abgefüllte Menge}$$

Es wird vorausgesetzt, dass $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, wobei bekannt ist, dass $\sigma = 1,5$. Zu verschiedenen Zeitpunkten werden $n = 4$ Flaschen aus der Produktion entnommen. Es soll ein Sollwert von $a = 502$ erreicht werden.

a) In Eurpopa wählt man $\alpha = 0,01$, damit gilt

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0,995} = 2,576.$$

Für die untere Kontrollgrenze K_u und die obere Kontrollgrenze K_o erhält man

$$K_u = a - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 502 - 2,576 \cdot \frac{1,5}{\sqrt{4}} = 500,068$$
$$K_o = a + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 502 + 2,576 \cdot \frac{1,5}{\sqrt{4}} = 503,932$$

b) Für die Kontrollentscheidung benötigen wir die Mittelwerte der Füllmengen $\bar{x}^{(t)}$ aus den jeweiligen Stichpunkten zu den Zeitpunkten $t = 1,2,3$. Es gilt

$$\bar{x}^{(1)} = \frac{1}{4}(501,0 + 500,8 + 499,8 + 503,0) = 501,15$$
$$\bar{x}^{(2)} = \frac{1}{4}(503,4 + 502,3 + 503,3 + 502,5) = 502,875$$
$$\bar{x}^{(3)} = \frac{1}{4}(500,9 + 501,5 + 503,1 + 504,1) = 502,4$$

Zu jedem der drei Zeitpunkte wird $H_0 : \mu = a$ angenommen, da

$$K_u < \bar{x}^{(t)} < K_o \qquad t = 1,2,3.$$

Es gibt also keine signifikanten Abweichungen vom Sollwert $a = 502$ und darum wird nicht in den Produktionsprozess eingegriffen.

c) Hier betrachtet man die Zufallsvariable

$$N \ldots \text{Lauflänge bis zum ersten Eingreifen}$$

Es wird vorrausgesetzt, dass der unbekannte Erwartungswert dem Wert

$$\mu = 499$$

entspricht. Da dieser von dem Sollwert a abweicht befinden wir uns also in dem Fall eines gestörten Prozesses. Gesucht ist der Erwartungswert $\mathbf{E}(N)$. Es gilt

$$\mathbf{E}(N) = \frac{1}{p}$$

wobei

$$p = g(\mu) = g_1(\delta), \qquad \delta = \frac{\mu - a}{\sigma} = \frac{499 - 502}{1,5} = 2$$

g bzw. g_1 bezeichnet hier die Gütefunktion und diese berechnet sich durch die Formel

$$g_1(\delta) = \Phi(\delta\sqrt{n} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}) + \Phi(-\delta\sqrt{n} - z_{1-\frac{\alpha}{2}})$$

Hierbei bezeichent Φ die Verteilungsfunktion der Standartnormalverteilung. Damit erhält man

$$\begin{aligned}
g_1(\delta) &= g_1(2) \\
&= \Phi(2\sqrt{4} - 2,576) + \Phi(-2\sqrt{4} - 2,576) \\
&\approx \Phi(1,42) + \Phi(-6,576) \\
&= \Phi(1,42) + 1 - \Phi(6,576) \\
&= 0,9222 + 1 - 1 \\
&= 0,9222
\end{aligned}$$

Damit erhält man:

$$\mathbf{E}(N) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,9222} \approx 1,084.$$

D.h. im Mittel dauert es nur etwas mehr als eine Stichprobe bis die Abweichung erkannt ist und in den Produktionsprozess einzugreifen wird.