13. Lösung weitere Übungsaufgaben Statistik II WiSe 2019/2020

1. **Aufgabe:** Im Rahmen der statistischen Qualitätskontrolle wird ein Posten mit höchstens 2% Ausschussanteil als gut angesehen. Ein Posten mit mehr als 4% Ausschussanteil ist hingegen ein schlechter Posten. Das Risiko des Produzenten beträgt 2,5% und das des Konsumenten 1%.

   a) Bestimmen Sie für diese Werte die Annahme- und Ablehnungsgerade eines sequentiellen Stichprobenplanes.

   b) Wie groß ist der erwartete Stichprobenumfang für die Fälle, dass der Ausschussanteil gleich 2% oder 4% oder c_s ist?

   c) Wieviele Stücke müssen mindestens geprüft werden, bis die Lieferung als gut angenommen wird?

Lösung:

$p_\alpha = 0{,}02\ , \quad \alpha = 0{,}025 \quad \text{und} \quad p_\beta = 0{,}04\ , \quad \beta = 0{,}01.$

a)

$$
\begin{aligned}
d &= \ln\left(\frac{p_\beta \cdot (1-p_\alpha)}{p_\alpha \cdot (1-p_\beta)}\right) = \ln\left(\frac{0{,}04 \cdot 0{,}98}{0{,}02 \cdot 0{,}96}\right) = 0{,}7137665 \\
a &= \frac{\ln\left(\frac{1-\alpha}{\beta}\right)}{d} = \frac{\ln\left(\frac{0{,}975}{0{,}01}\right)}{0{,}7137665} = \underline{6{,}42} \\
b &= \frac{\ln\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)}{d} = \frac{\ln\left(\frac{0{,}99}{0{,}025}\right)}{0{,}7137665} = \underline{5{,}15} \\
c_s &= \frac{\ln\left(\frac{1-p_\alpha}{1-p_\beta}\right)}{d} = \frac{\ln\left(\frac{0{,}98}{0{,}96}\right)}{0{,}7137665} = \underline{0{,}028888}
\end{aligned}
$$

Annahmegerade: $-a + c_s \cdot k = -6{,}42 + 0{,}028888 \cdot k$

Ablehnungsgerade: $b + c_s \cdot k = 5{,}15 + 0{,}028888 \cdot k$

b)

- $p = p_\alpha = 0{,}02$ und $L(p_\alpha) = 1 - \alpha = 0{,}975$

$$\mathbf{E}N = \frac{b-(a+b)L(p)}{p-c_s} = \frac{5{,}15 - (5{,}15+6{,}42)\cdot 0,975}{0{,}02 - 0{,}028888} = \underline{689{,}8}$$

- $p = p_\beta = 0{,}04$ und $L(p_\alpha) = \beta = 0{,}01$

$$\mathbf{E}N = \frac{b-(a+b)L(p)}{p-c_s} = \frac{5{,}15 - (5{,}15+6{,}42)\cdot 0,01}{0{,}04 - 0{,}028888} = \underline{453{,}1}$$

- $p = c_s$

$$\mathbf{E}N = \frac{ab}{c_s(1-c_s)} = \frac{6{,}42 \cdot 5{,}15}{0{,}028888 \cdot (1-0{,}028888)} = \underline{1178{,}6}$$

c) Sind alle $X_k = 0$ für $k = 1, 2, ...$, so wird die Lieferung angenommen, falls die Annahmegerade größer gleich Null ist:

$$-a + c_s \cdot k \geq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad k \geq \frac{a}{c_s} = \frac{6{,}42}{0{,}028888} = \underline{222{,}2}$$

Selbst wenn alle geprüften Stücke gut sind, müssen damit mindestens 223 Stück geprüft werden.

---

2. Aufgabe: Die Qualität einer Lieferung soll durch einen sequentiellen Stichprobenplan gesichert werden. Eine Lieferung mit 1% Ausschuss ist eine gute Lieferung und eine mit 4% Ausschuss ist eine schlechte Lieferung.

Der Abnehmer (Konsument) und der Hersteller (Produzent) einigen sich auf das Folgende:

Eine gute Lieferung soll mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 0,05 abgelehnt werden. Eine schlechte Lieferung soll mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 0,01 angenommen werden.

a) Bestimmen Sie für diese Werte die Annahme- und Ablehnungsgerade eines sequentiellen Stichprobenplanes.

b) Nach 199 geprüften Stücken liegen genau 6 Ausschussstücke und 193 fehlerfreie Stücke vor. Welche Testentscheidungen sind möglich, nachdem man das 200. Stück geprüft hat?

Lösung:

$p_\alpha = 0{,}01$, $\alpha = 0{,}05$ und $p_\beta = 0{,}04$, $\beta = 0{,}01$.

a)

$$\begin{aligned}
d &= \ln\left(\frac{p_\beta \cdot (1-p_\alpha)}{p_\alpha \cdot (1-p_\beta)}\right) = \ln\left(\frac{0{,}04 \cdot 0{,}99}{0{,}01 \cdot 0{,}96}\right) = 1{,}417066 \\
a &= \frac{\ln\left(\frac{1-\alpha}{\beta}\right)}{d} = \frac{\ln\left(\frac{0{,}95}{0{,}01}\right)}{1{,}417066} = \underline{3{,}21} \\
b &= \frac{\ln\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)}{d} = \frac{\ln\left(\frac{0{,}99}{0{,}05}\right)}{1{,}417066} = \underline{2{,}11} \\
c_s &= \frac{\ln\left(\frac{1-p_\alpha}{1-p_\beta}\right)}{d} = \frac{\ln\left(\frac{0{,}99}{0{,}96}\right)}{1{,}417066} = \underline{0{,}02171505}
\end{aligned}$$

Annahmegerade: $-a + c_s \cdot k = -3{,}21 + 0{,}02171505 \cdot k$
Ablehnungsgerade: $b + c_s \cdot k = 2{,}11 + 0{,}02171505 \cdot k$

b) Für $k = 200$ sind:
Annahmegerade: $-3{,}21 + 0{,}02171505 \cdot 200 = 1{,}13$
Ablehnungsgerade: $2{,}11 + 0{,}02171505 \cdot 200 = 6{,}45$

Es liegen genau 6 Ausschussstücke vor, d.h. $x_{199} = 6$.

Ist das 200. Stück Ausschuss, dann ist $x_{200} = 7$. In diesem Fall ist $x_{200} = 7 > 6{,}45$ und H_0 wird abgelehnt. Die Lieferung wird also als schlecht abgelehnt.

Ist das 200. Stück kein Ausschss, dann gibt es weiterhin nur 6 Ausschussstücke unter den (jetzt 200) geprüften, d.h. $x_{200} = 6$. In diesem Fall ist $1{,}13 < x_{200} = 6 < 6{,}45$ und die Prüfung muss fortgesetzt werden.
