

## 12. Lösung weitere Übungsaufgaben Statistik II WiSe 2019/2020

**1. Aufgabe:** Im Rahmen der statistischen Qualitätskontrolle wird ein Posten mit höchstens 1,7% Ausschussanteil als gut angesehen. Ein Posten mit mehr als 5% Ausschussanteil ist hingegen ein schlechter Posten. Der Produzent fordert, dass ein guter Posten höchstens mit Wahrscheinlichkeit von 0,01 abgelehnt wird. Der Konsument fordert, dass ein schlechter Posten höchstens mit Wahrscheinlichkeit 0,05 angenommen wird.

- a) Prüfen Sie, ob für die Annahmezahl  $c = 14$  ein  $n$  bestimmbar ist, so dass die Forderungen des Produzenten und auch die des Konsumenten erfüllt sind. Falls ein  $n$  bestimmbar ist, dann geben Sie alle möglichen  $(n, c)$ -Pläne an.
- b) Für die Annahmezahl  $c = 16$  gibt es folgende Pläne, welche beide Forderungen (die vom Konsument und die vom Produzent) erfüllen:

$$\begin{aligned}(n, c) &= (487, 16) \\(n, c) &= (488, 16) \\&\vdots \\(n, c) &= (523, 16)\end{aligned}$$

Welchen dieser Pläne würde der Konsument bevorzugen, um sein Risiko kleinstmöglich zu halten? Begründen Sie kurz!

---

Lösung:

$$\begin{aligned}p_\alpha &= 0,017 & p_\beta &= 0,05 \\ \alpha &= 0,01 & \beta &= 0,05\end{aligned}$$

- a) Poisson-Approximation:  $c=14$

$$\begin{aligned}\frac{\chi_{2(c+1);1-\beta}^2}{2p_\beta} \leq n \leq \frac{\chi_{2(c+1);\alpha}^2}{2p_\alpha} &\implies \frac{\chi_{30;0,95}^2}{0,1} \leq n \leq \frac{\chi_{30;0,01}^2}{0,034} \\ \implies \frac{43,77}{0,1} \leq n \leq \frac{14,95}{0,034} &\implies 437,7 \leq n \leq 439,7\end{aligned}$$

Mögliche Pläne sind:  $(n, c) = (438, 14)$  und  $(n, c) = (439, 14)$ .

- b) Der Konsument würde den Plan  $(n, c) = (523, 16)$  wählen. Das Konsumentenrisiko ist bei diesen Plan am geringsten unter allen möglichen Plänen, da bei der festen Annahmezahl  $c = 16$  mit steigenden Stichprobenumfang  $n$  die Wahrscheinlichkeit der Ablehnung einer schlechten Lieferung immer größer wird. Die Wahrscheinlichkeit der Annahme einer schlechten Lieferung (Konsumentenrisiko) ist also bei diesem Plan am geringsten.

2. **Aufgabe:** In der Wareneingangskontrolle sollen angelieferte Fertigteile auf ihre Übereinstimmung mit den im Kaufvertrag festgelegten Qualitätsnormen überprüft werden. Der langfristige Liefervertrag, den das Unternehmen abzuschließen gedenkt, soll auch Bestimmungen über die Art der Qualitätskontrolle enthalten.

Die Verhandlungen mit den Lieferfirmen haben zu folgender Vereinbarung geführt: Eine Lieferung mit 2% Ausschuss ist (noch) eine gute Lieferung und eine mit 4% Ausschuss ist (schon) eine schlechte Lieferung. Eine gute Lieferung soll mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 0,03 abgelehnt und eine schlechte mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 0,05 angenommen werden.

Zur Stichprobenkontrolle soll ein  $(n, c)$ -Stichprobenplan verwendet werden.

- Bestimmen Sie eine untere Grenze für den Stichprobenumfang  $n$ .
- Bestimmen Sie, falls möglich, für  $n = 1025$  alle  $(n, c)$ -Stichprobenpläne, welche die Bedingungen erfüllen!
- Für den Stichprobenumfang  $n = 1110$  gibt es folgende 3 Pläne, welche die Bedingungen erfüllen:

$$(n, c) = (1110, 31)$$

$$(n, c) = (1110, 32)$$

$$(n, c) = (1110, 33)$$

Welchen dieser Pläne würde die Lieferfirma bevorzugen? Begründen Sie kurz!

Lösung:

$$p_\alpha = 0,02, \quad p_\beta = 0,04, \quad \alpha = 0,03 \text{ und } \beta = 0,05.$$

$$z_{1-\alpha} = z_{0,97} = 1,881 \quad \text{und} \quad z_{1-\beta} = z_{0,95} = 1,645$$

a)

$$\begin{aligned} n &\geq \left[ \frac{\sqrt{p_\alpha(1-p_\alpha)}z_{1-\alpha} + \sqrt{p_\beta(1-p_\beta)}z_{1-\beta}}{p_\beta - p_\alpha} \right]^2 \\ &= \left[ \frac{\sqrt{0,02 \cdot 0,98} \cdot 1,881 + \sqrt{0,04 \cdot 0,96} \cdot 1,645}{0,04 - 0,02} \right]^2 = \underline{857,59} \end{aligned}$$

$$\implies \underline{n \geq 858}$$

b) Normalverteilungs-Approximation:

$$\begin{aligned} c &\geq np_\alpha + z_{1-\alpha}\sqrt{np_\alpha(1-p_\alpha)} - 0,5 \\ &= 1025 \cdot 0,02 + 1,881\sqrt{1025 \cdot 0,02 \cdot 0,98} - 0,5 \\ &= \underline{28,43} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c &\leq np_\beta - z_{1-\beta}\sqrt{np_\beta(1-p_\beta)} - 0,5 \\ &= 1025 \cdot 0,04 - 1,645\sqrt{1025 \cdot 0,04 \cdot 0,96} - 0,5 \\ &= \underline{30,18} \end{aligned}$$

Die folgenden beiden Stichprobenpläne erfüllen die Bedingungen:

$$(n, c) = (1025, 29)$$

$$(n, c) = (1025, 30)$$

- c) Der Produzent würde den Plan  $(n, c) = (1110, 33)$  wählen, da hier beim gleichen Stichprobenumfang die Annahmezahl am größten ist und somit der Plan die größte Annahmewahrscheinlichkeit besitzt. Das Risiko der Produzenten, dass eine gute Lieferung abgelehnt wird, ist damit bei diesen Plan am geringsten.
-