

4. weitere Übungsaufgaben Statistik für Ingenieure

WiSe 19/20

10. Aufgabe Billig verkaufte Rauchmelder eines Typs haben einen herstellungsbedingten Wackelkontaktfehler. 20% der Rauchmelder funktionieren gleich nach dem Einbau nicht. Für den Rest könnte man eine Exponentialverteilung für die Funktionsdauer L mit erwarteter Funktionsdauer von 2000h annehmen.

- Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion der Lebensdauer L eines Rauchmelders!
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Rauchmelder mindestens 2000 h funktioniert?

Lösung: Es seien die Zufallsgrößen L und F gegeben durch

$$L = \text{„Lebensdauer des Rauchmelders in Stunden(h)“}$$

$$F = \begin{cases} 1 & \text{Rauchmelder funktioniert nach dem einschalten} \\ 0 & \text{Rauchmelder funktioniert nach dem einschalten nicht} \end{cases}$$

mit

$$P(F = 1) = 0,8, \quad P(F = 0) = 0,2$$

Für die Lebensdauer L soll laut Aufgabe gelten, dass sie unter der Bedingung, dass der Rauchmelder nach dem Einschalten funktioniert, exponentialverteilt ist. Das heißt es gilt für die bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$P(L < x | F = 1) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

λ ist bei der Exponentialverteilung das Reziproke des Erwartungswertes. Dieser soll laut Aufgabe 2000h betragen. D.h. es soll gelten

$$\lambda = \frac{1}{2000}$$

Die Lebensdauer ist Null, wenn der Schalter schon nach dem Einschalten nicht funktioniert. Es gilt also

$$P(L < x | F = 0) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Mit Hilfe der Formel für die Totale Wahrscheinlichkeit erhält man für die Verteilungsfunktion der Lebensdauer

$$F_L(x) = P(L < x)$$

$$\begin{aligned} &= P(L < x | F = 1) P(F = 1) + P(L < x | F = 0) P(F = 0) \\ &= \begin{cases} (1 - e^{-\frac{x}{2000}}) 0,8 + 1 \cdot 0,2 & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 - 0,8e^{-\frac{x}{2000}} & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

b) Zu berechnen ist die Wahrscheinlichkeit $P(L \geq 2000)$:

$$\begin{aligned} P(L \geq 2000) &= 1 - P(L < 2000) \\ &= 1 - F_L(2000) \\ &= 1 - \left(1 - 0,8e^{-\frac{2000}{2000}}\right) \\ &= 0,8e^{-1} \\ &= 0,2943 \end{aligned}$$

D.h. die Wahrscheinlichkeit, dass ein Rauchmelder mindestens 2000h funktioniert, beträgt etwa 29,43%.

□