7. Lösungen weitere Übungsaufgaben Statistik für Ingenieure WiSe 19/20

1. Aufgabe:

a) Grundgesamtheit sind alle Reifen aus der Produktion von Langstone aus dem Monat März der entsprechenden Reifentypen.

b) beide Zufallsgrößen sind stetig. Ferner gilt für beide $x > 0$. Daraus folgt die Verhältnisskala (Ratio-Skala).

c) Zweistichprobensituation unabhängiger Stichproben

d) i) Zwei parallele Boxplots, da so die Lage des Medians, die Streuung der Werte und Ausreißer direkt miteinander verglichen werden können.

ii) Sind die Zufallsgrößen normalverteilt? **Shapiro-Wilk-Test**
H_0: beide Zufallsgrößen sind normalverteilt.
H_1: mindestens eine Zufallsgröße ist nicht normalverteilt.
aus (a): $p = 0,4827 > \frac{\alpha}{2} = 0,025$
aus (b): $p = 0,3185 > \frac{\alpha}{2} = 0,025$
$\Longrightarrow H_0$ wird angenommen.
Die Verteilungen der beiden Zufallsgrößen unterscheiden sich nicht signifikant von der Normalverteilung.

Sind die Varianzen gleich? **F-Test für Varianzen zweier normalverteilter Merkmale**
H_0: Die Varianzen sind gleich.
H_1: Die Varianzen sind nicht gleich.
aus (d): $p = 0,2409 > \alpha = 0,05$
$\Longrightarrow H_0$ wird angenommen.
Die Varianzen unterscheiden sich nicht signifikant.

iii) Für normalverteilte Zufallsgrößen mit gleicher Varianz findet der **2-Stichproben-t-Test** Anwendung. Es wird ein **einseitiger Test** genutzt, da für LP1 geringere Werte als für LP2 angestrebt werden.
H_0: $\mu_{LP1} = \mu_{LP2}$
H_1: $\mu_{LP1} < \mu_{LP2}$
aus (j): $p = 0,0003109 < \alpha = 0,05$
$\Longrightarrow H_0$ wird abgelehnt.
Der erwartete Abrieb von LP1 ist signifikant kleiner als der von LP2.

2. **Aufgabe:**

   a) **Shapiro-Wilk-Test**
      H_0: Beide Zufallsgrößen sind normalverteilt.
      H_1: Mindestens eine Zufallsgröße ist nicht normalverteilt.
      aus (1): $p = 0,9383 > \frac{\alpha}{2} = 0,025$
      aus (2): $p = 0,678 > \frac{\alpha}{2} = 0,025$
      $\Longrightarrow H_0$ wird angenommen.
      Die Verteilungen der beiden Zufallsgrößen unterscheiden sich nicht signifikant von der Normalverteilung.

   b) QQ-Plots, da dort die theoretischen Quantile der Normalverteilung gegen die tatsächlichen Quantile aufgetragen werden. Bei Abweichungen von der Normalverteilung weicht die erzeugte Kurve stark von der Geraden ab.

   c) lineare, gleichsinnige Abhängigkeit zwischen x und y

   d) Für den Test auf gleichsinnigen Zusammenhang zweier normalverteilter Zufallsgrößen wird der **Pearson-Korrelationstest** genutzt. Da nur einseitig getestet werden soll (nur gleichsinnig), findet ein **einseitiger Test** Anwendung.
      H_0: $\rho(x, y) \leq 0$
      H_1: $\rho(x, y) > 0$
      aus (4): $p = 3,427 \cdot 10^{-6} < \alpha = 0,05$
      $\Longrightarrow H_0$ wird abgelehnt.
      Es existiert ein signifikanter gleichsinniger Zusammenhang zwischen den beiden Zufallsgrößen.

3. **Aufgabe:**

   Shapiro-Wilk-Test
   H_0: Die Zufallsgröße ist normalverteilt.
   H_1: Die Zufallsgröße ist nicht normalverteilt.
   aus (1): $p = 0,2437 > \alpha = 0,05$
   $\Longrightarrow H_0$ wird angenommen.
   Die Verteilung der Zufallsgröße unterscheidet sich nicht signifikant von der Normalverteilung.

   1-Stichproben-t-Test, beidseitig
   H_0: $\mu = 4,5$
   H_1: $\mu \neq 4,5$
   aus (4): $p = 0,1457 > \alpha = 0,05$
   $\Longrightarrow H_0$ wird angenommen.
   Die erwartete Kapazität unterscheidet sich nicht signifikant von 4,5μF.

4. Aufgabe:

a) Die Ergebnisse der Versuchsreihen alt und neu besitzen den gleichen Median. Die Werte der Versuchsreihe alt sind aber stärker gestreut. Das ist an den längeren Whiskern und dem größeren IQR erkennbar. Die Verteilung ist symmetrisch. Die Versuchsreihe neu zeigt eine schwächere Streuung und eine leicht rechtsschiefe Verteilung.

b) Es handelt sich um eine Zwei-Stichproben-Situation unabhängiger Stichproben.

c) **Shapiro-Wilk-Test**
H_0: Die Zufallsgrößen alt und neu sind normalverteilt.
H_1: Mindestens eine der Zufallsgrößen alt und neu ist nicht normalverteilt.
alt: $p = 0,6658 > \frac{\alpha}{2} = 0,025$
neu: $p = 0,4478 > \frac{\alpha}{2} = 0,025$
$\Longrightarrow H_0$ wird angenommen.
Die Verteilungen der beiden Zufallsgrößen unterscheiden sich nicht signifikant von der Normalverteilung.

d) Der Fligner-Test wird für stetige Zufallsgrößen genutzt. Da hier von normalverteilten Zufallsgrößen ausgegangen werden darf, muss der genauere F-Test verwendet werden.

e) **F-Test, einseitig**
H_0: ${\sigma_{alt}}^2 = {\sigma_{neu}}^2$
H_1: ${\sigma_{alt}}^2 > {\sigma_{neu}}^2$
aus (3): $p = 1,25 \cdot 10^{-6} < \alpha = 0,05$
$\Longrightarrow H_0$ wird abgelehnt.
Die Varianz ${\sigma_{neu}}^2$ ist signifikant kleiner als die Varianz ${\sigma_{alt}}^2$.

f) Zunächst muss mithilfe des **F-Tests, beidseitig** bestimmt werden, ob die Varianzen gleich oder unterschiedlich sind. Hinweis: Der einseitige Test reicht als Voraussetzung nicht aus.
H_0: ${\sigma_{alt}}^2 = {\sigma_{neu}}^2$
H_1: ${\sigma_{alt}}^2 \neq {\sigma_{neu}}^2$
aus e) (1): $p = 2,502 \cdot 10^{-6} < \alpha = 0,05$
$\Longrightarrow H_0$ wird abgelehnt.
Die Varianzen unterscheiden sich signifikant.

Für normalverteilte Zufallsgrößen mit unterschiedlichen Varianzen findet der **Welchs-t-Test, beidseitig** Anwendung.
H_0: $\mu_{alt} = \mu_{neu}$
H_1: $\mu_{alt} \neq \mu_{neu}$
aus (3): $p = 0,789 > \alpha = 0,05$
$\Longrightarrow H_0$ wird angenommen.
Die erwarteten Füllmengen der beiden Anlagen unterscheiden sich nicht signifikant.

5. Aufgabe:

a)
- Man erkennt eine lineare, gleichsinnige Abhängigkeit, da die Schuhgröße mit steigender Körpergröße steigt.
- Die Werte sind um die Gerade gestreut.

b) **Shapiro-Wilk-Test**
H_0: Die Zufallsgrößen Körpergröße und Schuhgröße sind normalverteilt.
H_1: Mindestens eine der Zufallsgrößen Körpergröße und Schuhgröße ist nicht normalverteilt.
Körpergröße: $p = 0,01778 < \frac{\alpha}{2} = 0,025$
Schuhgröße: $p = 7,391 \cdot 10^{-5} < \frac{\alpha}{2} = 0,025$
$\Longrightarrow H_0$ wird abgelehnt.
Die Verteilungen der beiden Zufallsgrößen Körpergröße und Schuhgröße unterscheiden sich signifikant von der Normalverteilung.

c) Für stetige und nicht normalverteilte Zufallsgrößen wird der **Spearman-Korrelationstest** genutzt.
H_0: Die Zufallsgrößen Körpergröße und Schuhgröße sind unkorreliert. $\Leftrightarrow \rho^{(s)} = 0$
H_1: Die Zufallsgrößen Körpergröße und Schuhgröße sind korreliert. $\Leftrightarrow \rho^{(s)} \neq 0$
aus (2): $p = 2,2 \cdot 10^{-16} < \alpha = 0,01 \Longrightarrow H_0$ wird abgelehnt.
Es gibt eine signifikante Abhängigkeit zwischen Schuhgröße und Körpergröße.

d) χ^2-Test auf Unabhängigkeit

6. Aufgabe:

a)
- Bei beiden Gruppen (Männer/Frauen) ist eine lineare gleichsinnige Abhängigkeit erkennbar.
- Bei den Frauen nehmen beide Zufallsgrößen kleinere Werte an als bei den Männern.
- Bei den Männern sind die Werte stärker gestreut als bei den Frauen.

b)
- Fast alle Menschen mit kleinen Schuhen sind weiblich, mit großen Schuhen männlich.
- Im mittleren Bereich sind Frauen vertreten, ein Großteil ist aber männlich.
- Die Abbildung zeigt deutliche Unterschiede in der Verteilung abhängig vom Geschlecht.
- Dies lässt auf eine ausgeprägte Abhängigkeit zwischen Schuhgröße und Körpergröße schließen.

c) **χ^2-Test auf Unabhängigkeit** H_0: Die Zufallsgrößen Geschlecht und Schuhgröße sind stochastisch unabhängig.
H_1: Die Zufallsgrößen Geschlecht und Schuhgröße sind stochastisch abhängig.
$p = 2,2 \cdot 10^{-16} < \alpha = 0,01$. Da $p < \alpha$ wird H_0 abgelehnt. Schuhgröße und Geschlecht können demnach als stochastisch abhängig angenommen werden.

7. Aufgabe:

a)
- Lage: Empirischer Median Sorte 1$\approx$ 751 – 752, Empirischer Median Sorte 2$\approx$ 745 $\longrightarrow$ Die Reagenzgläser der Sorte 2 schmelzen meistens bei niedrigeren Temperaturen.
- Die Box der Sorte 1 liegt zwischen 750 und 752 °C, die von Sorte 2 zwischen 743 und 749 °C.
- Symmetrie: Sorte 1 zeigt eine linksschiefe Verteilung, Sorte 2 eine rechtsschiefe.
- Streuung: Für Sorte 1 umfasst der IQR etwa 1,5 K, bei Sorte 2,7 K. Sorte 2 weist eine stärkere Streuung auf, da der IQR deutlich größer ist und die Whisker länger sind als bei Sorte 1.

b) **Shapiro-Wilk-Test**
H_0: Sorte 1 ist normalverteilt.
H_1: Sorte 1 ist nicht normalverteilt.
aus (b1): $p = 0,8045 > \frac{\alpha}{2} = 0,025$
$\Longrightarrow H_0$ wird angenommen.
Die Verteilung der Zufallsgröße Sorte 1 unterscheidet sich nicht signifikant von der Normalverteilung.
H_0: Sorte 2 ist normalverteilt.
H_1: Sorte 2 ist nicht normalverteilt.
aus (b2): $p = 0,8446 > \frac{\alpha}{2} = 0,025$
$\Longrightarrow H_0$ wird angenommen.
Die Verteilung der Zufallsgröße Sorte 2 unterscheidet sich ebenfalls nicht signifikant von der Normalverteilung. Deshalb können beide Zufallsgrößen als normalverteilt betrachtet werden.

c) Für zwei normalverteilte, unabhängige Zufallsgrößen findet der **F-Test** Anwendung.
H_0: ${\sigma_1}^2 = {\sigma_2}^2$
H_1: ${\sigma_1}^2 \neq {\sigma_2}^2$
aus (c2): $p = 0,0002444 < \alpha = 0,05$
$\Longrightarrow H_0$ wird abgelehnt.
Die Varianzen ${\sigma_1}^2$ und ${\sigma_2}^2$ unterscheiden sich signifikant.

d) Für zwei normalverteilte, unabhängige Zufallsgrößen mit unterschiedlichen Varianzen findet der **Welchs-t-Test Anwendung**. Da nur getestet werden soll, ob der Erwartungswert μ_1 größer ist als μ_2 wird **einseitig** getestet.
H_0: $\mu_1 \leq \mu_2$
H_1: $\mu_1 > \mu_2$
aus (d2): $p = 0,001108 < \alpha = 0,05$
$\Longrightarrow H_0$ wird abgelehnt.
Die erwartete Schmelztemperatur bei Sorte 1 ist signifikant größer als die bei Sorte 2.

8. Aufgabe:

a) Ich würde R1 bevorzugen. Aus dem Mosaikplot ist erkennbar, dass bei R1 etwa 20 % der Proben geringe Wirksamkeit zeigt, dafür etwa die Hälfte der Proben starke Wirkung. Bei R2 dagegen zeigt mehr als ein Drittel der Proben geringe Wirksamkeit und nur ca 20 % starke . Insgesamt sollten nur wenige Proben geringe und sehr viele Proben eine starke Wirksamkeit zeigen, was durch R1 besser erfüllt wird als durch R2.

b) Test auf Unabhängigkeit der Zufallsgrößen (χ^2-**Test**)
H_0: Die Wirksamkeit ist vom Mittel unabhängig.
H_1: Die Wirksamkeit ist vom Mittel abhängig.
$p = 3,223 \cdot 10^{-9} < \alpha = 0,01$
$\Longrightarrow H_0$ wird abgelehnt.
Es gibt eine signifikante Abhängigkeit zwischen der Wahl des Mittels und der Wirksamkeit.