4. Lösungen weitere Übungsaufgaben Statistik für Ingenieure WiSe 19/20

1. Aufgabe: ZG X - zufällige Zeit in der Warteschlange in min - exponentialverteilt
geg.: $\mathrm{E}X = 4[min]$
allgemein gilt: $\mathrm{E}X = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{4} \Rightarrow X \sim \mathbf{Exp}\left(\frac{1}{4}\right)$

a) $\mathrm{P}(X = 3) = 0$

b) $\mathrm{P}(X < 2) = F_X(2) = 1 - e^{-\frac{1}{4}\cdot 2} = 0,3935$

c) $\mathrm{P}(2 < X < 7) = F_X(7) - F_X(2) = 0,4328$

d) p-Quantil (x_p): Lösung x_p der Gleichung $F_X(x_p) = p$ der ZG X
Median ($x_{0,5}$): $F_X(x_{0,5}) = 0,5 = 1 - e^{-\frac{1}{4}x_{0,5}} \Rightarrow x_{0,5} = 2,7726$
oberes Quartil ($x_{0,75}$): $F_X(x_{0,75}) = 0,75 = 1 - e^{-\frac{1}{4}x_{0,75}} \Rightarrow x_{0,75} = 5,5452$

e) Skizze Verteilungsfuntkion (strikt monoton wachsend)
mit Werten $F_X(2) = 0,39$ und $F_X(2,77) = 0,5$ sowie $F_X(5,55) = 0,75$

2. Aufgabe: Solldurchmesser = 250mm, Toleranz = ± 0,75mm
X_1 - zufälliger Durchmesser eines von Maschine 1 produzierten Werkstückes,
$X_1 \sim \mathcal{N}(250; 0,16)$
X_2 - zufälliger Durchmesser eines von Maschine 2 produzierten Werkstückes,
$X_2 \sim \mathcal{N}(249,8; 0,09)$

a) Schätzung liefert eine bei Maschine 1 größere Ausschusswahrscheinlichkeit

b) Mit $\frac{X_1 - \mu_{X_1}}{\sigma_{X_1}} =: Z_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$
$\mathrm{P}(249,25 \leq X_1 \leq 250,75) = \mathrm{P}\left(\frac{249{,}25-250}{0{,}4} \leq Z_1 \leq \frac{250{,}75-250}{0{,}4}\right)$
$= \mathrm{P}\left(-1,875 \leq Z_1 \leq 1,875\right) = \Phi(1,875) - \Phi(-1,875)$
$= \Phi(1,875) - (1 - \Phi(1,875)) = 2\Phi(1,875) - 1 = 0,9386$
$\Rightarrow$ die Ausschusswahrscheinlichkeit für Maschine 1 $= 1 - 0,9386 = 0,0614$
Analog für Maschine 2. Hier beträgt die Ausschusswahrscheinlichkeit $0,0344$.

3. Aufgabe: $X \sim \mathbf{Bin}(n, p)$ mit $n = 5000$ und $p = 0,35$.

Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung nach Zentralen Grenzwertsatz - im zentralen Wahrscheinlichkeitsbereich.

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad \text{mit } \mu = n \cdot p \text{ und } \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p)$$

Für seltene Ereignisse (kleines p, z.B. p = 0,0005) ist die Poissonverteilung als Näherungsverteilung zu verwenden.

$$X \sim \mathbf{Poi}(\lambda) \quad \text{mit } \lambda = n \cdot p = 5000 \cdot 0{,}0005 = 2{,}5.$$

Auch am oberen Rand des Wahrscheinlichkeitsbereiches $[0,1]$, also für großes p (z.B. $p = 0{,}9995$) kann man die Poisonapproximation, dann aber für das Gegenereignis, nutzen.

$$\begin{array}{rrcl} & X & \sim & \mathbf{Bin}(n,p) \text{ mit } n = 5000 \text{ und } p = 0{,}9995. \\ & Y := n - X & \sim & \mathbf{Bin}(n, 1-p) \text{ mit } n = 5000 \text{ und } 1-p = 0{,}0005. \\ \text{approximativ} \quad \Longrightarrow & Y & \sim & \mathbf{Poi}(\lambda) \text{ mit } \lambda = n \cdot (1-p) = 5000 \cdot 0{,}0005 = 2{,}5. \end{array}$$

4. Aufgabe: X - zufällige Wartezeit in min,
$X \sim \mathbf{U}[0,30]$

a) $\mathrm{P}(X > 10) = 1 - \mathrm{P}(X \leq 10) = 1 - F_X(10) = 1 - \frac{10-0}{30-0} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

b) $\mathrm{E}X = \frac{a+b}{2} = \frac{0+30}{2} = 15[min] = x_{0,5}$

c) $\sigma^2 = \frac{(a-b)^2}{12} = \frac{(0-30)^2}{12} = 75[min^2]$
$\Rightarrow \sigma = \sqrt{\sigma^2} = 8,66[min](= 8[min]40[s])$

5. Aufgabe: X - zufällige Dauer eines Lötvorganges,
$X \sim \mathcal{N}(90s, (16s)^2)$
$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ mit $\mu = 90s$ und $\sigma = 162$

a)

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(40 < X < 80) &= \mathrm{P}\left(\frac{40-90}{16} < Z < \frac{80-90}{16}\right) \\ &= \mathrm{P}(-3,125 < Z < -0,625) \\ &= \Phi(-0,625) - \Phi(-3,125) \\ &= (1 - \Phi(0,625)) - (1 - \Phi(3,125)) \\ &= \Phi(3,125) - \Phi(0,625) \\ &= 0,9991 - 0,734 = \underline{0,2651} \end{aligned}$$

b) $\mathrm{P}(X > a) \leq 0,1 \Leftrightarrow \mathrm{P}(X \leq a) > 0,9 \Leftrightarrow \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{a-90}{16}\right) > 0,9$
$\Rightarrow \Phi\left(\frac{a-90}{16}\right) > 0,9 \Rightarrow \frac{a-90}{16} > z_{0,9} = 1,2816 \Rightarrow a > 110,5056$

6. Aufgabe: X: zufällige Lebensdauer , $X \sim \mathbf{Wei}(0,10,2)$

$F(x) = 1 - e^{-(\frac{x-\alpha}{\beta})^m} = 1 - e^{-(\frac{x-0}{10})^2}$

a)

$\mathrm{P}(X \leq 1) = 1 - e^{-(\frac{1}{10})^2} = 0,00995$

b)

$$P(X \geq 10) = 1 - P(X < 10) = 1 - F(10) = 1 - (1 - e^{-(\frac{10}{10})^2})$$
$$= e^{(-(\frac{10}{10})^2)} = e^{-1^2} = 0,3679$$

c)

$$P(5 \leq X \leq 10) = P(X \leq 10) - P(X \leq 5) = F(10) - F(5) = 1 - e^{-1^2} - (1 - e^{-0,5^2})$$
$$= e^{-0,5^2} - e^{-1^2} = 0,4109$$

7. Aufgabe:

X: Füllmenge in ml, $X \sim \mathcal{N}(502, 1)$
$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ mit $\mu = 502$ und $\sigma = 1$

a)

$$P(500 \leq X \leq 503) = P\left(\frac{500-502}{1} \leq Z \leq \frac{503-502}{1}\right) = P(-2 \leq Z \leq 1)$$
$$= \Phi(1) - \Phi(-2) = \Phi(1) + \Phi(2) - 1 = 0,8413 + 0,9772 - 1 = 0,8185$$

b)

$\mu = 502$ ml, σ gesucht

$$P(X \leq 500) = P\left(Z \leq \frac{500-502}{\sigma}\right) = \Phi\left(-\frac{2}{\sigma}\right) \leq 0,01$$

Anwendung von Φ^{-1} :

$$-\frac{2}{\sigma} \leq \Phi^{-1}(0,01) = z_{0,01} = -z_{0,99} = -2,3263$$
$$\sigma \leq \frac{-2}{-2,3263} = 0,8597 \text{ ml}$$

8. Aufgabe:

X: Durchmesser in mm, $X \sim \mathcal{N}(22 \text{ mm}, 0,64 \text{ mm}^2)$
$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ mit $\mu = 22$ mm und $\sigma = 0,8$ mm

a)

$$P(21 \leq X \leq 23) = P\left(\frac{21-22}{0,8} \leq Z \leq \frac{23-22}{0,8}\right) = P(-1,25 \leq Z \leq 1,25)$$
$$= \Phi(1,25) - \Phi(-1,25) = \Phi(1,25) - (1 - \Phi(1,25)) = 2 \cdot \Phi(1,25) - 1$$
$$= 2 \cdot 0,8944 - 1 = 0,7888$$

b)

$$P(X \leq 21) = P\left(Z \leq \frac{21-22}{\sigma}\right) = \Phi\left(-\frac{1}{\sigma}\right) \leq 0,05$$

Anwendung von Φ^{-1} :

$$-\frac{1}{\sigma} \leq \Phi^{-1}(0,05) = z_{0,05} = -z_{0,95} = -1,6449$$
$$\sigma \leq \frac{-1}{-1,6449} = 0,608 \text{ mm}$$

9. Aufgabe: X: Wartezeit in s, $\lambda = \frac{1}{EX} = \frac{1}{15}, X \sim \mathbf{Exp}(\frac{1}{15})$

a)

$$\mathrm{P}(X > 30) = 1 - \mathrm{P}(X \leq 30) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{15}\cdot 30}) = e^{-2} = 0,1353$$

b)

$$\mathrm{P}(12 \leq X \leq 18) = \mathrm{P}(X \leq 18) - \mathrm{P}(X \leq 12) = F(18) - F(12) = (1 - e^{-\frac{18}{15}}) - (1 - e^{-\frac{12}{15}}) = e^{-\frac{4}{5}} - e^{-\frac{6}{5}} = 0,1481$$

c)

$$0,25 = P(X \leq x_{0,25}) = 1 - e^{-\frac{1}{15}\cdot x_{0,25}}$$
$$0,75 = e^{-\frac{1}{15}\cdot x_{0,25}}$$
$$\ln\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{-x_{0,25}}{15}$$
$$x_{0,25} = -15 \cdot (\ln(3) - \ln(4)) = 4,3152$$