3. Lösungen weitere Übungsaufgaben Statistik für Ingenieure WiSe 19/20

1. Aufgabe: 10 Bauteile gleicher Bauart werden vor der Weiterverarbeitung einer Materialprüfung unterzogen. 7 bestanden diese Prüfung, sind damit fehlerfrei und 3 nicht. Für jedes verbaute Teil, welches den Test nicht bestanden hat entsteht in 90% der Fälle eine Garantieforderung in Höhe von 1000 €. Versehentlich gelangen auch die 3 nicht fehlerfreien Teile zur Weiterverarbeitung. Es werden aus den 10 Teilen 5 entnommen und diese jeweils eingebaut.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle 5 eingebauten Teile fehlerfrei sind?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 1 nicht fehlerfreies Teil eingebaut wurde?

c) Wie groß ist die erwartete Garantieforderung für die 5 eingebauten Bauteile?

<u>Lösung:</u>

X - zufällige Anzahl der fehlerfreien Teile
Hypergeometrische Verteilung: $X \sim \mathbf{Hyp}(10, 7, 5)$

a)

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$P(X = 5) = \frac{\binom{7}{5} \cdot \binom{3}{0}}{\binom{10}{5}} = \frac{1}{12} = \underline{0,0833}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass alle 5 eingebauten Teile fehlerfrei sind, beträgt 0,0833.

b)

$$P(X < 4) = 1 - P(X = 5) - P(X = 4) = 1 - \frac{1}{12} - \frac{\binom{7}{4} \cdot \binom{3}{1}}{\binom{10}{5}} = 1 - \frac{1}{12} - \frac{5}{12} = \underline{0,5}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 1 nicht fehlerfreies Teil eingebaut wurde, beträgt 0,5.

c) G: Garantieforderung in €

$$G = 0,9 \cdot (5 - X) \cdot 1000 \text{ €}$$

$$EG = 0,9 \cdot (5 - EX) \cdot 1000\text{€} = 0,9 \cdot (5 - n \cdot \frac{M}{N}) \cdot 1000 \text{ €}$$

$$= 0,9 \cdot \left(5 - 5 \cdot \frac{7}{10}\right) \cdot 1000 \text{ €} = \underline{1350 \text{ €}}$$

Die erwartete Garantieforderung für die 5 eingebauten Teile ist 1350 €.

---

2. Aufgabe: An einem neuen Werkstoff wird ein Belastungstest durchgeführt. Bei einer festgelegten extremen Krafteinwirkung bricht der Werkstoff oder er bricht nicht. Es ist bekannt, dass ein Bruch mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,04 erfolgt.

a) Es werden unabhängig voneinander 7 Versuche durchgeführt. Wie wahrscheinlich ist es, dass mehr als 1 Bruch erfolgt?

b) In einer weiteren Versuchsreihe führt man den Belastungstest so lange durch, bis das erste Mal ein Bruch erfolgt.

   i. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man mehr als 4 Versuche benötigt?

   ii. Ein Bruchversuch kostet 50 €. Wie groß sind die erwarteten Kosten der Versuche?

Lösung:

a) X zufällige Anzahl gebrochener Werkstcke
Binomialverteilung: $X \sim \mathbf{Bin}(7; 0,04)$

$$P(X > 1) = 1 - P(X = 1) - P(X = 0)$$
$$= 1 - \binom{7}{0} \cdot 0,04^0 \cdot (1 - 0,04)^7 - \binom{7}{1} \cdot 0,04^1 \cdot (1 - 0,04)^6 = \underline{0,0294}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 1 Bruch erfolgt, beträgt 0,0294.

b) X zufällige Anzahl der Versuche bis zum ersten Bruch
geometrische Verteilung: $X \sim Geo(0,04)$

i) $P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4)$
$= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 3) - P(X = 4)$
$= 1 - (p + p \cdot (1 - p) + p \cdot (1 - p)^2 + p \cdot (1 - p)^3)$
$= 1 - 0,04 \cdot (1 + 0,96 + 0,96^2 + 0,96^3) = \underline{0,8493}$

Die Wahrscheinlichkeit, dass man mehr als 4 Versuche benötigt, beträgt 0,8493.

ii) $EX = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,04} = 25$

K: Kosten in €

$K = X \cdot 50€$

$EK = EX \cdot 50€ = 25 \cdot 50\ € = \underline{1250\ €}$

Die erwarteten Kosten der Versuche sind 1250 €.

---

3. Aufgabe: Auf einer Ausstellung von 12 Gemälden befinden sich 8 Originale. Ein Besucher wählt zufällig 4 Bilder aus und kauft diese.

a) Wie ist die zufällige Anzahl X der Originale unter den 4 gekauften Bildern verteilt? (Parameter nicht vergessen!)

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er mindestens 3 Orginale gekauft hat?

c) Jedes Original kann er mit einem Gewinn von 50 € weiter verkaufen. Bei jedem Bild, welches kein Orginal ist, macht er einen Verlust von 100 € (d.h. der Gewinn beträgt in diesem Fall -100 €). Wie groß ist der erwartete Gewinn?

Lösung:

a) X - zufällige Anzahl X der Originale unter den 4 gekauften Bildern
X ist hypergeometrisch verteilt ($X \sim \mathbf{Hyp}(N, M, n)$) mit den Parametern $N = 12$, $M = 8$ und $n = 4$.

b)

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{\binom{8}{3}\binom{4}{1}}{\binom{12}{4}} + \frac{\binom{8}{4}\binom{4}{0}}{\binom{12}{4}} \\ &= \frac{224}{495} + \frac{70}{495} = \frac{294}{495} \approx \underline{0,594} \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass er mindestens 3 Orginale gekauft hat, ist 0,594.

c) $50\,€ \cdot X$ = Gewinn der Originale
$-100\,€ \cdot (4 - X)$ = Gewinn der Nicht-Originale

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \qquad G &= 50\,€ \cdot X - 100\,€ \cdot (4 - X) \\ &= 150\,€ \cdot X - 400\,€ \\ \Longrightarrow \qquad \mathbf{E}G &= 150\,€ \cdot \mathbf{E}X - 400\,€ \\ &= 150\,€ \cdot \frac{8}{3} - 400\,€ = \underline{0\,€} \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\mathbf{E}X = n \cdot \frac{M}{N} = 4 \cdot \frac{8}{12} = \frac{8}{3}$$

Der erwartete Gewinn ist 0 €.

---

4. Aufgabe: Es ist bekannt, dass 40% aller Menschen die Blutgruppe Null besitzen. Nach einem Aufruf zur Blutspende melden sich unabhängig voneinander 10 Studenten im Kreiskrankenhaus zur Spende.

a) Wie ist die zufällige Anzahl X der Studenten mit Blutgruppe Null verteilt? (Parameter nicht vergessen!)

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als ein Student die Blutgruppe Null besitzt?

c) 120 Euro ist der Wert einer Blutspende bei der Blutgruppe Null, bei allen anderen Blutgruppen sind es 10 Euro weniger. Wie groß ist der erwartete Wert der Blutspenden der 10 Studenten?

Lösung:

a) X - zufällige Anzahl der Studenten mit Blutgruppe Null
X ist binomialverteilt ($X \sim \mathbf{Bin}(n, p)$) mit $n = 10$ und $p = 0,4$.

b)

$$\begin{aligned} P(X > 1) &= 1 - P(X \leq 1) \\ &= 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) \\ &= 1 - \left(\binom{10}{0} \cdot 0,4^0 \cdot 0,6^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0,4^1 \cdot 0,6^9\right) \\ &= 1 - (0,00605 + 0,04031) \approx \underline{0,954} \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als ein Student die Blutgruppe Null besitzt, beträgt 0,954.

c) $120 \text{ €} \cdot X$ = Wert der Blutspenden mit Blutgruppe Null.
$110 \text{ €} \cdot (10 - X)$ = Wert der Blutspenden bei allen anderen Blutgruppen.

$$\begin{aligned} W &= 120 \text{ €} \cdot X + 110 \text{ €} \cdot (10 - X) \\ &= 10 \text{ €} \cdot X + 1100 \text{ €} \\ \mathbf{E}W &= 10 \text{ €} \cdot \mathbf{E}X + 1100 \text{ €} \\ &= 10 \text{ €} \cdot 4 + 1100 \text{ €} \\ &= \underline{1140 \text{ €}} \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\mathbf{E}X = n \cdot p = 10 \cdot 0,4 = 4$$

Der erwartete Wert der Blutspenden der 10 Studenten ist 1140 €.

---

5. Aufgabe: Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Werkstück in einem gegebenen Jahr ein bestimmter Materialfehler auftritt, ist $\frac{1}{10000}$. Die Jahresproduktion umfasst 40000 Werkstücke.

a) Wie ist die zufällige Anzahl X der Werkstücke mit Materialfehler verteilt? Mit welcher Verteilung kann man näherungsweise rechnen?(Parameter nicht vergessen!)

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle 40000 Werkstücke ohne diesen Materialfehler sind?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 3 Werkstücke den bestimmten Materialfehler haben?

d) Die Produktionskosten eines Werkstückes betragen 17 €. Werkstücke ohne Materialfehler können für 25 € verkauft werden, Werkstücke mit Materialfehler hingegen nur zum Materialwert von 5,5 €. Der Gewinn sind die Einnahmen durch Verkauf minus die Produktionskosten. Wie groß ist der erwartete Gewinn?

Lösung:

a) X die zufällige Anzahl der Werkstücke mit Materialfehler

X ist binomialverteilt: $X \sim \mathbf{Bin}(n, p)$ mit n=40000 und $p = \frac{1}{10000}$.

$n = 40000 \geq 30$, $p = \frac{1}{10000} \leq 0,05$ und $n \cdot p = 4 \leq 10$
$\Longrightarrow$ X ist (approximativ) poissonverteilt: $X \sim \mathbf{Poi}(\lambda)$ mit

$$\lambda = n \cdot p = 40000 \cdot \frac{1}{10000} = 4.$$

b)

$$P(X = 0) = \frac{4^0}{0!} \cdot e^{-4} = e^{-4} = \underline{0,0183}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass alle 40000 Werkstücke ohne diesen Materialfehler sind, ist 0,0183. (Rechnet man exakt mit der Binomialverteilung, so erhält man auf 4 Nachkommastellen gerundet den gleichen Wert.)

c)

$$\begin{aligned} P(X > 3) &= 1 - P(X \leq 3) \\ &= 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)) \\ &= 1 - (0,0183 + 0,0733 + 0,1465 + 0,1954) = \underline{0,5665} \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 3 Werkstücke den bestimmten Materialfehler haben, ist 0,5665. (Rechnet man exakt mit der Binomialverteilung, so erhält man auf 4 Nachkommastellen gerundet den gleichen Wert.)

d) $5,5 € \cdot X$ = Wert der Werkstücke mit Materialfehler.
$25 € \cdot (40000 - X)$ = Wert der Werkstücke ohne Materialfehler.

$$\begin{aligned} G &= 5,5 € \cdot X + 25 € \cdot (40000 - X) - 40000 \cdot 17 € \\ &= 320000 € - 19,5 € \cdot X \\ \mathbf{E}G &= 320000 € - 19,5 € \cdot \mathbf{E}(X) \\ &= 320000 € - 19,5 € \cdot 4 \\ &= \underline{319922 €} \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\mathbf{E}X = \lambda = 4$$

Der erwartete Gewinn beträgt 319922€.

---

6. Aufgabe: Welche der folgenden Verteilungen würde man zur Modellierung welcher Zufallsvariable verwenden: (Mehrfachnennungen sind möglich!) Bitte geben Sie, falls möglich, jeweils die Parameter der Verteilungen mit an.

a: Binomialverteilung
b: diskrete Gleichverteilung
c: hypergeometrische Verteilung
d: geometrische Verteilung
e: negative Binomialverteilung
f: Poissonverteilung

☐ Eine Lieferung von 27 Stiften enthält 2 Stifte, die defekt sind. Der Empfänger testet zur Kontrolle 3 Stifte und behält die Lieferung, falls alle 3 funktionieren, ansonsten sendet er die Lieferung zurück. Sei X die zufällige Anzahl der defekten Stifte unter den 3 geprüften. Wie ist X verteilt?

X - zufällige Anzahl der defekten Stifte unter den 3 geprüften Stiften
c) hypergeometrische Verteilung:
$X \sim \mathbf{Hyp}(N, M, n)$ mit $N = 27, M = 2$ und $n = 3$.

☐ Sie führen Experimente durch, welche unabhängig voneinander zu 60% gelingen. Sie benötigen ein gelungenes Experiment. Wie ist die zufällige Anzahl X der Experimente bis zum ersten gelungenen Experiment verteilt?

X - zufällige Anzahl Experimente bis zum ersten gelungenen Experiment
d) geometrische Verteilung:
$X \sim \mathbf{Geo}(p)$ mit $p = 0,6$.

☐ Eine Werkstatt hat eine Anlage, die Ersatzteile für ein gewisses Auto produziert. Unabhängig von den anderen Teilen ist jedes produzierte Ersatzteil mit Wahrscheinlichkeit $p = 0,15$ Ausschuss. Es werden 30 Ersatzteile produziert. Wie ist die zufällige Anzahl X der produzierten Ausschussteile unter den 30 produzierten Teilen verteilt?

X - zufällige Anzahl der produzierten Ausschussteile unter den 30 produzierten Teilen
a) Binomialverteilung:
$X \sim \mathbf{Bin}(n, p)$ mit $n = 30$ und $p = 0,15$.

☐ Der Automat produziert 300 Schrauben pro Minute bei einer Ausschussquote weit unter einem Prozent. Wie viele defekte Schrauben werden in einer halben Stunde produziert?

X - zufällige Anzahl defekte Schrauben die in einer halben Stunde produziert werden
f) Poissonverteilung: $(n = 300 \cdot 30 = 9000 \geq 30, p \ll 0,01 \leq 0,05)$
$X \sim \mathbf{Poi}(\lambda)$ mit $\lambda = n \cdot p = 9000 \cdot ? = ?$.

☐ Aus einer laufenden Produktion werden Kleinteile entnommen und geprüft, ob sie normgerecht sind. Wie ist die zufällige Anzahl der geprüften Teile verteilt bis man 5 normgerechte Teile hat?

X - zufällige Anzahl der geprüften Kleinteile bis zum 5-ten normgerechten Teil
e) negative Binomialverteilung:
$X \sim \mathbf{NegBin}(r, p)$ mit $r = 5$ und $p = ?$.

☐ Von 70 Teilnehmern einer Klausur sind nur 30 regelmäßig in die Vorlesungen und Übungen gegangen. Bei 10 zufällig herausgegriffenen Klausuren beeindruckt die Bandbreite der Klausurergebnisse. Wie groß ist die Chance, Klausuren von mindestens 4 pflichtbewußten Studenten herausgegriffen zu haben?

X - zufällige Anzahl der pflichtbewußten Studenten unter den 10 zufällig herausgegriffenen
c) hypergeometrische Verteilung:
$X \sim \textbf{Hyp}(N, M, n)$ mit $N = 70, M = 30$ und $n = 10$.

☐ Bei den 10 in Induktionsöfen zur Frequenzsteuerung eingesetzten Kondensatoren ist zuvor eine Prüfung ihrer Sicherheit gegen Spannungsspitzen vorzunehmen. Nur Kondensatoren, die diese Prüfung bestehen, dürfen eingebaut werden. Wie viele Kondensatoren müssen überprüft werden, um die 10 notwendigen bereit zu haben?

X - zufällige Anzahl der Kondensatoren die überprüft werden, bis zum 10-ten der die Püfung besteht
e) negative Binomialverteilung:
$X \sim \textbf{NegBin}(r, p)$ mit $r = 10$ und $p =?$.

☐ Eine Sortieranlage für Pfandflaschen sondert automatisch falsche Flaschen mit großer Sicherheit aus. Wobei nach diesen Sortiervorgang immer noch 0,3% falsche Flaschen vorkommen. Wie ist die Anzahl verbliebener falscher Flaschen bezüglich eines 20-iger Kastens verteilt, die per Hand nachsortiert werden müssten?

X - zufällige Anzahl der verbleibenden falschen Flaschen in dem 20-iger Kasten
a) Binomialverteilung:
$X \sim \textbf{Bin}(n, p)$ mit $n = 20$ und $p = 0,003$.

☐ Die obige Anlage sortiert ca. 1000 Flaschen pro Minute. Welche Verteilung wählen Sie für die Anzahl falscher, verbliebener Flaschen pro Minute?

X - zufällige Anzahl der verbleibenden falschen Flaschen pro Minute, d.h. unter den 1000 Flaschen
f) Poissonverteilung: $(n = 1000 \geq 30, p = 0,003 \leq 0,05$ und $n \cdot p = 3 \leq 10)$
$X \sim \textbf{Poi}(\lambda)$ mit $\lambda = n \cdot p = 1000 \cdot 0,003 = 3$.

Sie sollen zufällig unter 20 Personen jemand ohne Bevorzugung auswählen. Welche Verteilung der Auswahl würden Sie verwenden?

X - zufällig gewählte Nummer der Person
b) diskrete Gleichverteilung:
$X \sim \mathbf{U}(M)$ mit $M = \{1, 2, \ldots, 19, 20\}$.

Eine Familie bucht ihren Jahresurlaub in einem Hotel. Im Hotel sind zur gewünschten Zeit noch 12 Zimmer frei. 7 dieser 12 Zimmer besitzen einen direkten Meerblick. Die Familie bucht 3 der 12 Zimmer rein zufällig. Wieviele Zimmer mit Mehrblick wird die Familie wohl gebucht haben?

X - zufällige Anzahl der Zimmer mit Meerblick den 3 gebuchten
c) hypergeometrische Verteilung:
$X \sim \mathbf{Hyp}(N, M, n)$ mit $N = 12, M = 7$ und $n = 3$.

Ein Junge versucht mit einem Tennisball eine Dose von einem Zaunpfahl zu werfen. Mit wie vielen Versuchen schafft er dies?

X - zufällige Anzahl der Würfe bis die Dose fällt
d) geometrische Verteilung:
$X \sim \mathbf{Geo}(p)$ mit $p =?$.

An einem neuen Werkstoff wird ein Belastungstest durchgeführt. Bei einer festgelegten starken Krafteinwirkung bricht der Werkstoff oder er bricht nicht. Es ist bekannt, dass ein Bruch mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,04 erfolgt. Es werden unabhängig voneinander 7 Versuche durchgeführt. Bei wievielen Versuchen bricht der neue Werkstoff?

X- zufällige Anzahl der Versuche, unter den 7 Versuchen, bei denen das Werkstück bricht.
a) Binomialverteilung:
$X \sim \mathbf{Bin}(n, p)$ mit $n = 7$ und $p = 0,04$.