# 2. Lösungen weitere Übungsaufgaben Statistik für Ingenieure WiSe 19/20

**1. Aufgabe:** Drei Lokalzeitungen teilen den Markt in einer Stadt unter sich auf. Dabei hat Zeitung A 45% Marktanteil, Zeitung B 37%, und bei Zeitung C sind es 18%. Bei Zeitung A erfolgten 10% des Verkaufs an Abonnenten, bei Zeitung B sind dies 60% und bei Zeitung C 75%.

Ein Bürger dieser Stadt liest zum Frühstück seine abonnierte Lokalzeitung.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich dabei um die Zeitung C? Formulieren Sie vor der Berechnung der gesuchten Wahrscheinlichkeit relevante Ereignisse und geben Sie dafür die aus dem Text folgenden Wahrscheinlichkeiten an.

---

Lösung:

$A$: Kunde liest Zeitung A
$B$: Kunde liest Zeitung B
$C$: Kunde liest Zeitung C
$Abo$: Der Kunde hat die Zeitung abonniert

$P(A) = 0{,}45 \qquad P(Abo|A) = 0{,}1$

$P(B) = 0{,}37 \qquad P(Abo|B) = 0{,}6$

$P(C) = 0{,}18 \qquad P(Abo|C) = 0{,}75$

$$P(Abo) = P(Abo \cap A) + P(Abo \cap B) + P(Abo \cap C)$$
$$= P(Abo|A) \cdot P(A) + P(Abo|B) \cdot P(B) + P(Abo|C) \cdot P(C)$$
$$= 0{,}1 \cdot 0{,}45 + 0{,}6 \cdot 0{,}37 + 0{,}75 \cdot 0{,}18 = 0{,}402$$
$$P(C|Abo) = \frac{P(Abo|C) \cdot P(C)}{P(Abo)} = \frac{0{,}75 \cdot 0{,}18}{0{,}402} = \underline{0{,}3358}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,3358 handelt es sich um die Zeitung C.

---

**2. Aufgabe:** Ein Freemail-Anbieter möchte zum Schutz seiner Kunden einen Spam-Filter anbieten. Es gibt zwei Merkmale (Merkmal 1 und Merkmal 2), welche auf eine Spam-Mail hindeuten. Damit können die Mails in drei Gruppen eingeteilt werden:

Gruppe 1: Mails mit Merkmal 1
Gruppe 2: Mails mit Merkmal 2 und ohne Merkmal 1
Gruppe 3: Mails ohne die Merkmale 1 und 2

Der Anteil der drei Gruppen am Gesamtmailaufkommen und die Spam-Mail-Quote sind in der folgenden Tabelle zu finden:

| Gruppe | Anteil an den Mails | Spam-Mail-Quote |
|---|---|---|
| 1 | 5% | 95% |
| 2 | 15% | 70% |
| 3 | 80% | 20% |

a) Formulieren Sie vor den Berechnungen der gesuchten Wahrscheinlichkeiten relevante Ereignisse und geben Sie dafür die aus der Tabelle folgenden Wahrscheinlichkeiten an.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Mail eine Spam-Mail ist?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat eine Spam-Mail weder Merkmal 1 noch Merkmal 2, stammt damit also aus der Gruppe 3?

---

Lösung:

a) $A_i$ - eine zufällig ausgewählte Mail ist aus der Gruppe $i$ $i = 1, 2, 3$.
$S$ - eine zufällig ausgewählte Mail ist eine Spam-Mail.

$$\begin{array}{ll} P(A_1) = 0{,}05 & P(S|A_1) = 0{,}95 \\ P(A_2) = 0{,}15 & P(S|A_2) = 0{,}70 \\ P(A_3) = 0{,}80 & P(S|A_3) = 0{,}20 \end{array}$$

b)

$$\begin{aligned} P(S) &= \sum_{i=1}^{3} P(S|A_i) \cdot P(A_i) \\ &= 0{,}95 \cdot 0{,}05 + 0{,}70 \cdot 0{,}15 + 0{,}20 \cdot 0{,}80 = \underline{0{,}3125} \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Mail eine Spam-Mail ist beträgt 0,3125.

c)

$$P(A_3|S) = \frac{P(S|A_3) \cdot P(A_3)}{P(S)} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}8}{0{,}3125} = \underline{0{,}512}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,512 stammt eine Spam-Mail aus der Gruppe 3.

---

**3. Aufgabe:**

Die in der folgenden Tabelle stehenden Ereignisse sollen (vollständig) unabhängig sein. Gleichzeitig sind in der Tabelle ihre Wahrscheinlichkeiten aufgeführt:

| Ereignis | $A_1$ | $A_2$ | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $C$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Wahrscheinlichkeit | 0,9 | 0,8 | 0,75 | 0,5 | 0,6 | 0,95 |

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit $P(E)$ von folgender Ereignisbeziehung!

$$E = \big((A_1 \cup A_2) \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_3) \cap C\big)^{\mathsf{c}}$$

---

Lösung:

$$\begin{aligned}
P(E) &= P(((A_1 \cup A_2) \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_3) \cap C)^{\mathsf{c}}) \\
P(E) &= 1 - P((A_1 \cup A_2) \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_3) \cap C) \\
&\overset{(*)}{=} 1 - P(A_1 \cup A_2) \cdot P(B_1 \cup B_2 \cup B_3) \cdot P(C) \\
&\overset{(*)}{=} 1 - \big(1 - (1 - P(A_1))(1 - P(A_2))\big) \cdot \big(1 - (1 - P(B_1))(1 - P(B_2))(1 - P(B_3))\big) \cdot P(C) \\
&= 1 - (1 - 0{,}1 \cdot 0{,}2) \cdot (1 - 0{,}25 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}4) \cdot 0{,}95 \\
&= 0{,}11555
\end{aligned}$$

$(*)$ - Ereignisse sind vollständig unabhängig.

---

**4. Aufgabe:** Nach Ihrem Studium arbeiten Sie für einen großen Europäischen Flugzeugturbinenhersteller. Ihr neues Tätigkeitsfeld beschäftigt sich mit dem Gesamtsystem Turbine.

Es geht also um die Zuverlässigkeit des Systems Flugzeugturbine. Eine Analyse der wesentlichen Bauteile der Turbine führte zu der folgenden Einteilung von bezüglich der Zuverlässigkeit unabhängigen Versagensteilen:

- Verdichtungsrotor mit Schaufeln und Lager.
- Arbeitsrotor mit Schaufeln und Lager.
- Brenner: In der Brennkammer sind 5 Brenner, die einzeln geregelt und abgeschaltet werden können. Die Turbine kann auch noch mit 3 Brennern den notwendigen Schub erzeugen.
- Zum Brennkammersystem gehören weiterhin 2 Kerosinpumpen, die redundant die Brenner mit dem notwendigen Brennstoffdruck versorgen.

  Die Treibstoffleitungen, Dichtungen und Ventile werden nicht extra betrachtet, sondern z.B. für den Zyklus als *nicht ausfallbar* oder als Bestandteil der Pumpen und Brenner angesehen.
- Generator für elektrischen Strom, der gleichzeitig als Anlasser arbeitet.

Voruntersuchungen und spezielle Tests haben die folgenden Ausfallwahrscheinlichkeiten während eines Belastungszyklus (entspricht ungefähr einem Flug beginnend mit dem Rollen zur Startbahn, dem Start, dem Flug auf Reisehöhe, der Landung sowie dem Rollen in die Parkposition) ergeben:

| | |
|---:|---|
| Verdichtungsrotor | 5E-6 |
| Arbeitsrotor | 2E-5 |
| Brenner | 2,5E-3 |
| Kerosinpumpe | 5E-4 |
| Generator | 2E-5 |

Es sind jeweils für einen Belastungszyklus Berechnungen vorzunehmen:

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit funktionieren noch mindestens 3 Brenner?

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass an den Brennern das Kerosin mit dem notwendigen Druck anliegt!

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit funktioniert das Brennkammersystem?

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit funktionieren beide Rotoren?

e) Wie hoch ist die Zuverlässigkeit des Gesamtsystems Turbine?

f) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wäre nach einem Belastungszyklus bei der Inspektion der Turbine alles in Ordnung?

Lösung:

a) $X$ - zufällige Anzahl der funktionierenden Brenner
$X \sim \mathbf{Bin}(5, p)$ binomialverteilt mit $p = 1 - 2{,}5 \cdot 10^{-3}$.

$$P(\{X \geq 3\}) \;=\; \underline{0{,}99999984}$$

b) $P_i$ - $i$-te Pumpe funktioniert, $i = 1, 2$.
mindestens eine Punpe funktioniert:

$$\begin{aligned} P(P_1 \cup P_2) &= 1 - ((1 - P(P_1)) \cdot (1 - P(P_2))) \\ &= 1 - (P(P_1^c) \cdot P(P_2^c)) \\ &= 1 - (5 \cdot 10^{-4})^2 = \underline{0{,}99999975} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} P(\text{„Brennkammersystem funktioniert“}) &= P(P_1 \cup P_2 \cap \{X \geq 3\}) \\ &= P(P_1 \cup P_2) \cdot P(\{X \geq 3\}) \\ &= 0{,}9999998451 \cdot 0{,}99999975 \\ &= \underline{0{,}99999959} \end{aligned}$$

d) Beide Rotoren funktionieren: Verdichtungsrotor und Arbeitsrotor:

$$P(\text{„beide Rotoren funktionieren“}) = (1 - 5 \cdot 10^{-6}) \cdot (1 - 2 \cdot 10^{-5}) = \underline{0{,}99997500}$$

e) Zuverlässigkeit des Gesamtsystems Turbine:
mindesten 3 Brenner und mindesten eine Pumpe b) und beide Rotoren d) und Generator funktionieren.

$$\begin{aligned} P(\text{„Gesamtsystem zuverlässig“}) &= 0{,}99999959 \cdot 0{,}99997500 \cdot (1 - 2 \cdot 10^{-5}) \\ &= \underline{0{,}99995459} \end{aligned}$$

f) Alles ist in Ordnung:
5 Brenner und 2 Pumpen und 2 Rotoren und der Generator.

$P(\text{„alles okay“})$

$$\begin{aligned} &= (1 - 2{,}5 \cdot 10^{-3})^5 \cdot (1 - 5 \cdot 10^{-4})^2 \cdot (1 - 5 \cdot 10^{-6}) \cdot (1 - 2 \cdot 10^{-5}) \cdot (1 - 2 \cdot 10^{-5}) \\ &= \underline{0{,}98653063} \end{aligned}$$

**5. Aufgabe:** Bei einem Teeladen sind 70% der Kunden weiblich und 30% männlich. Der Inhaber des Ladens weiß aus langer Erfahrung, welcher Kunde lieber Früchtetee und welcher lieber schwarzen Tee trinkt. Bei den weiblichen Kunden trinken 40% lieber Früchtetee und 60% lieber schwarzen Tee. Bei den männlichen Kunden bevorzugen 55% Früchtetee und 45% schwarzen Tee.

Ein Kunde des Ladens serviert seinen Gästen Früchtetee, weil er diesen selbst bevorzugt.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieser Kunde weiblich ist? Formulieren Sie vor der Berechnung der gesuchten Wahrscheinlichkeit relevante Ereignisse und geben Sie dafür die aus dem Text folgenden Wahrscheinlichkeiten an.

---

Lösung:

$W$: Kunde ist weiblich
$F$: Kunde bevorzugt Früchtetee

$$P(W) = 0{,}7 \qquad P(F|W) = 0{,}4$$
$$P(W^c) = 0{,}3 \qquad P(F|W^c) = 0{,}55$$
$$P(F) = P(F \cap W) + P(F \cap W^c) = P(F|W) \cdot P(W) + P(F|W^c) \cdot P(W^c)$$
$$= 0{,}4 \cdot 0{,}7 + 0{,}55 \cdot 0{,}3 = 0{,}445$$
$$P(W|F) = \frac{P(F|W) \cdot P(W)}{P(F)} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}7}{0{,}445} = 0{,}6292$$

Die Wahrscheinlichkeit dass der Kunde, welcher Früchtetee bevorzugt, weiblich ist beträgt 0,6292.

---

**6. Aufgabe:** In einer Universitätsstadt sind 40% der Studenten Wohnheimbewohner. Weiter ist bekannt, dass von den Studenten, welche Wohnheimbewohner sind, 75% regelmäßig in die Mensa zum Mittagessen gehen. Von den Studenten, die keine Wohnheimbewohner sind, gehen hingegen nur 50% regelmäßig in die Mensa zum Mittagessen.

a) Formulieren Sie vor der Berechnung der in b) und c) gesuchten Wahrscheinlichkeiten relevante Ereignisse und geben Sie dafür die aus dem Text folgenden Wahrscheinlichkeiten an.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Student regelmäßig in die Mensa zum Mittagessen geht?

c) Von einem Studenten ist bekannt, dass er regelmäßig in die Mensa zum Mittagessen geht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Student ein Wohnheimbewohner ist?

---

Lösung:

a) $W$ - ein zufällig ausgewählter Student ist Wohnheimbewohner
$M$ - ein zufällig ausgewählter Student geht regelmäßig in die Mensa zum Mittagessen

$$P(W) = 0{,}4$$
$$P(M|W) = 0{,}75 \qquad P(M|W^c) = 0{,}5$$

b)

$$\begin{aligned} P(M) &= P(M \cap W) + P(M \cup W^c) \\ &= P(M|W) \cdot P(W) + P(M|W^c) \cdot P(W^c) \\ &= 0{,}75 \cdot 0{,}4 + 0{,}5 \cdot 0{,}6 = \underline{0{,}6} \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähler Student regelmäßig in die Mensa zum Mittagessen geht ist 0,6.

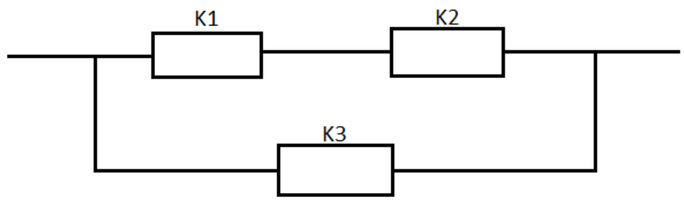
c)

$$P(W|M) = \frac{P(M|W) \cdot P(W)}{P(M)} = \frac{0{,}75 \cdot 0{,}4}{0{,}6} = \underline{0{,}5}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,5 ist der Student, der regelmässig in die Mensa zum Mittagessen geht, ein Wohnheimbewohner.

---

**7. Aufgabe:** Das unten skizzierte System fällt aus, falls die Komponente $K3$ sowie zusätzlich mindestens eine der Komponenten $K1$ oder $K2$ ausfallen.




Innerhalb einer gewissen Betriebsdauer fallen $K1$ mit Wahrscheinlichkeit 0,05, $K2$ mit Wahrscheinlichkeit 0,15 und $K3$ mit Wahrscheinlichkeit 0,01 aus. Berechnen Sie unter der Annahme unabhängiger Defekte an den einzelnen Komponenten die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb der Betriebsdauer das System nicht ausfällt.

---

<u>Lösung:</u>

$K_i$ - System $K_i$ fällt aus $i = 1, ..., 3$.
$S$ - System fällt aus.

$$P(K_1) = 0{,}05, \quad P(K_2) = 0{,}15 \quad \text{und} \quad P(K_3) = 0{,}01.$$

$$S = (K_1 \cup K_2) \cap K_3$$

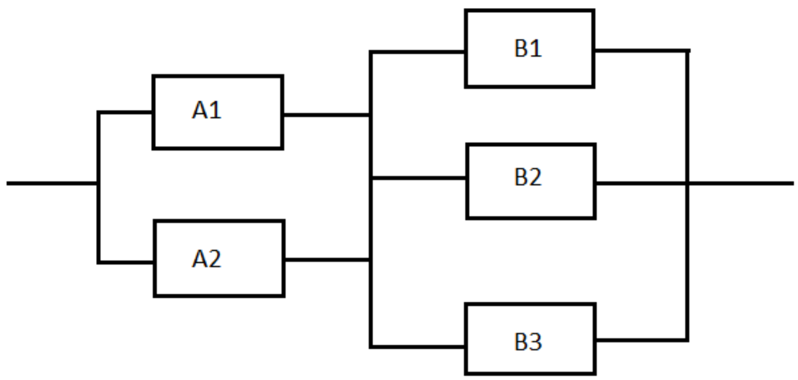
$$\begin{aligned}
P(S) &= P\left((K_1 \cup K_2) \cap K_3\right) \\
&= P\left((K_1 \cup K_2)\right) \cdot P(K_3) \\
&= (P(K_1) + P(K_2) - P(K_1 \cap K_2)) \cdot P(K_3) \\
&= (P(K_1) + P(K_2) - P(K_1) \cdot P(K_2)) \cdot P(K_3) \\
&= (0{,}05 + 0{,}15 - 0{,}05 \cdot 0{,}15) \cdot 0{,}01 = \underline{0{,}001925} \\
P(S^c) &= 1 - P(S) = \underline{0{,}998075}
\end{aligned}$$

oder auch so

$$\begin{aligned}
P(S) &= P\left((K_1 \cup K_2) \cap K_3\right) \\
&= P\left((K_1 \cup K_2)\right) \cdot P(K_3) \\
&= (1 - ((1 - P(K_1)) \cdot (1 - P(K_2))) \cdot P(K_3) \\
&= (1 - (1 - 0{,}05) \cdot (1 - 0{,}15)) \cdot 0{,}01 = \underline{0{,}001925} \\
P(S^c) &= 1 - P(S) = \underline{0{,}998075}
\end{aligned}$$

---

**8. Aufgabe:** Das folgende System funktioniert, falls mindestens eines der Teile der Gruppe A ($A1$, $A2$) funktioniert und mindestens eines der Teile der Gruppe B ($B1$, $B2$, $B3$) funktioniert.




Die Ausfallwahrscheinlichkeit der Teile von $A1$ und $A2$ ist jeweils 5%. Die Ausfallwahrscheinlichkeit von $B1$ und $B2$ ist jeweils 10% und die von $B3$ ist 20%. Die Teile $A1$, $A2$ und $B1$ bis $B3$ fallen unabhängig voneinander aus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das System funktioniert?

---

Lösung:

$A_i$: Element $Ai$ funktioniert, $i = 1, 2$
$A$: Gruppe A funktioniert
$B_i$: Element $Bi$ funktioniert, $i = 1, 2$
$B$: Gruppe B funktioniert

$P({A_1}^c) = P({A_2}^c) = 0{,}05$ und $P({B_1}^c) = P({B_2}^c) = 0{,}1$ und $P({B_3}^c) = 0{,}2$.

$P(A^c) = P({A_1}^c \cap {A_2}^c) = P({A_1}^c) \cdot P({A_2}^c) = 0{,}05 \cdot 0{,}05 = 0{,}0025$
$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - 0{,}0025 = 0{,}9975$
$P(B^c) = P({B_1}^c \cap {B_2}^c \cap {B_3}^c) = P({B_1}^c) \cdot P({B_2}^c) \cdot P({B_3}^c) = 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}002$
$P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - 0{,}002 = 0{,}998$
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}9975 \cdot 0{,}998 = 0{,}995505$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das System funktioniert, beträgt 0,995505.

---