1. Lösungen weitere Übungsaufgaben Statistik für Ingenieure WiSe 19/20

1. Aufgabe: Sie lassen eine Produktion von Thermostaten zweifach kontrollieren. Aus den beobachteten Häufigkeiten wurden folgende Wahrscheinlichkeiten geschätzt.

Kontrollgerät 1	Kontrollgerät 2	Wahrscheinlichkeit
nicht OK	nicht OK	0,041
nicht OK	OK	0,045
OK	nicht OK	0,011
OK	OK	0,903

Sei A_i das Ereignis, dass ein Teil der Produktion beim Kontrollgerät i $(i = 1, 2)$ als OK erkannt wird.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für:

a)	$A_1^c \cap A_2^c$	**e)**	$A_1 \cup A_2$	**i)**	A_1
b)	$A_1^c \cap A_2$	**f)**	$A_1 \cup A_2^c$	**j)**	A_2
c)	$A_1 \cap A_2^c$	**g)**	$A_1^c \cup A_2$	**k)**	A_1^c
d)	$A_1 \cap A_2$	**h)**	$A_1^c \cup A_2^c$	**l)**	A_2^c

Lösung:
a) bis d) ist gegeben:

$$\begin{aligned} P(A_1^c \cap A_2^c) &= 0{,}041 \\ P(A_1^c \cap A_2) &= 0{,}045 \\ P(A_1 \cap A_2^c) &= 0{,}011 \\ P(A_1 \cap A_2) &= 0{,}903 \end{aligned}$$

e) bis h) kann man aus a) bis d) mit der Regel von de Morgan bestimmen:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2) &= P((A_1^c \cap A_2^c)^c) = 1 - P(A_1^c \cap A_2^c) = 1 - 0{,}041 = 0{,}959 \\ P(A_1 \cup A_2^c) &= P((A_1^c \cap A_2)^c) = 1 - P(A_1^c \cap A_2) = 1 - 0{,}045 = 0{,}955 \\ P(A_1^c \cup A_2) &= P((A_1 \cap A_2^c)^c) = 1 - P(A_1 \cap A_2^c) = 1 - 0{,}011 = 0{,}989 \\ P(A_1^c \cup A_2^c) &= P((A_1 \cap A_2)^c) = 1 - P(A_1 \cap A_2) = 1 - 0{,}903 = 0{,}097 \end{aligned}$$

i) und j) kann man mit der Formel für die totale Wahrscheinlichkeit ermitteln:

$$\begin{aligned} P(A_1) &= P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_2^c) = 0{,}903 + 0{,}011 = 0{,}914 \\ P(A_2) &= P(A_2 \cap A_1) + P(A_2 \cap A_1^c) = 0{,}903 + 0{,}045 = 0{,}948 \end{aligned}$$

bleiben noch k) und l)

$$\begin{aligned} P(A_1^c) &= 1 - P(A_1) = 0{,}086 \\ P(A_2) &= 1 - P(A_2) = 0{,}052 \end{aligned}$$

---

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für $P(A_1|A_2^c)$ und $P(A_1|A_2)$.

$$\begin{aligned} P(A_1|A_2) &= \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{0{,}903}{0{,}948} = 0{,}9525 \\ P(A_1|A_2^c) &= \frac{P(A_1 \cap A_2^c)}{P(A_2^c)} = \frac{0{,}011}{0{,}052} = 0{,}2115 \end{aligned}$$

---

c) Zeigen Sie, dass A_1 und A_2 nicht unabhängig sind. Warum ist das so, obwohl die beiden Kontrollgeräte unabhängig von einander arbeiten?

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2) = 0{,}903 \quad &\neq \quad 0{,}866472 = 0{,}914 \cdot 0{,}948 = P(A_1) \cdot P(A_2) \\ &\Longrightarrow \quad A_1 \text{ und } A_2 \text{ sind nicht unabhängig.} \end{aligned}$$

Die Kontrollgeräte arbeiten zwar unabhängig voneinander, aber die Ergebnisse der Kontrollen sollten im Idealfall gleich sein.

---

d) Sie sollen dem Geschätsführer eine Schätzung angeben, wie viel Prozent der Produktion definitiv fehlerhaft ist und nicht verkauft werden kann. Als "definitiv fehlerhaft" stufen Sie alle Termostate ein, die durch beide Tests gefallen sind. Dieses unerfreuliche Ereignis heiße D.

$$D = A_1^c \cap A_2^c \quad \Longrightarrow \quad P(D) = P(A_1^c \cap A_2^c) = 0{,}041$$

---

e) Ferner sollen Sie schätzen, wie viel Prozent wahrscheinlich defekt sind. Als "wahrscheinlich defekt" gelten alle Thermostate, die mindestens bei einem Test durchgefallen sind. Dieses Ereignis heiße W.

$$W = (A_1 \cap A_2)^c \quad \Longrightarrow \quad P(W) = 1 - P(A_1 \cap A_2) = 0{,}097$$

---

2. Aufgabe: Es seien für die zwei Ereignisse A und B die Wahrscheinlichkeiten $P(A) = 0{,}5$ und $P(A \cup B) = 0{,}8$ gegeben:

a) Bestimmen Sie $P(B)$ und $P(B|A)$, falls A und B unvereinbar sind.

b) Bestimmen Sie $P(B)$ und $P(B|A)$, falls A und B unabhängig sind.

<u>Lösung:</u>

a)

$$A \cap B = \emptyset$$
$$P(B) = P(A \cup B) - P(A) = 0{,}8 - 0{,}5 = 0{,}3$$
$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0}{0{,}5} = 0$$

b)

es gilt:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

es folgt:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = P(B) \cdot (1 - P(A)) + P(A)$$
$$P(B|A) = P(B) = 0{,}6$$

---

3. Aufgabe: Es seien für die zwei Ereignisse A und B die Wahrscheinlichkeiten $P(A) = 0{,}65$ und $P(B) = 0{,}8$ gegeben:

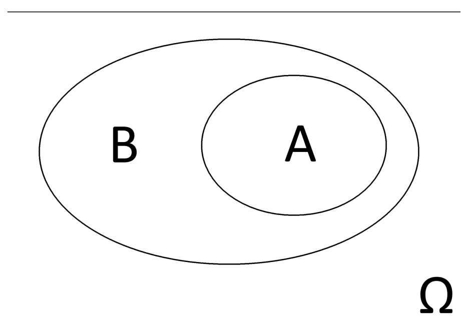
a) Wie groß kann $P(A \cap B)$ höchstens sein?

b) Wie groß muss $P(A \cup B)$ mindestens sein?

c) Weisen Sie nach, dass A und B **keine** unvereinbaren Ereignisse sein können, also zeigen Sie $P(A \cap B) \geq c > 0$!
Hinweis: Versuchen Sie ein solches c zu finden.

<u>Lösung:</u>

Grenzfall für a) und b)



a)

$$P(A \cap B) \leq P(A) = 0{,}65$$

b)

$$P(A \cup B) \geq P(B) = 0{,}8$$

c)

unvereinbar: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0{,}65 + 0{,}8 = 1{,}45$

Da $P(A \cup B) \leq 1$, können A und B nicht unvereinbar sein.
Die Berechnung muss für $P(A \cup B) = 1$ durchgeführt werden, da dort $P(A \cap B)$ minimal wird.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$
$$P(A \cap B) \geq 0{,}65 + 0{,}8 - 1 = 0{,}45 = c$$

---

4. Aufgabe: Ein Arbeiter an einer Fertigungsstraße verbaut Rotoren in 40 Kühlwasserpumpen. Das Ereignis, dass er bei der i-ten Pumpe einen Fehler macht, sei mit A_i bezeichnet. Drücken Sie die folgenden Ereignisse mathematisch, mithilfe der A_i und geeigneter Mengenoperatoren, aus.

a) Mindestens bei einer der Pumpen ist der Rotor fehlerhaft eingebaut.

b) Unter den 40 Pumpen taucht bei keiner ein Einbaufehler auf.

c) Genau bei einer der Pumpen ist der Einbau fehlerhaft.

d) Höchstens bei einer der Pumpen ist der Einbau fehlerhaft.

Lösung:

A_i - i-te Pumpe macht Fehler

a) A - mindestens ein fehlerhafter Einbau

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{40} = \bigcup_{i=1}^{40} A_i$$

b) B - kein fehlerhafter Einbau

$$\begin{aligned} B = A^c &= (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{40})^c \\ &= (A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_{40}^c) = \bigcap_{i=1}^{40} A_i^c \end{aligned}$$

c) C - genau eine Pumpe ist fehlerhaft eingebaut

$$\begin{aligned} C &= \{\text{nur 1. Pumpe mit Fehler}\} \cup \ldots \cup \{\text{nur 40. Pumpe mit Fehler}\} \\ &= \bigcup_{i=1}^{40} \{\text{nur } i\text{-te Pumpe mit Fehler}\} \\ &= \bigcup_{i=1}^{40} (A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots A_{i-1}^c \cap A_i \cap A_{i+1}^c \cap \ldots \cap A_{40}^c) \\ &= \bigcup_{i=1}^{40} (A_i \cap \bigcap_{k=1, k\neq i}^{40} A_k^c) \\ &= \bigcup_{i=1}^{40} \bigcap_{k=1, k\neq i}^{40} (A_k^c \cap A_i) \end{aligned}$$

d) D - höchstens ein Fehler

$$D = C \cup B$$

---

5. Aufgabe: Sie stellen Bauteile für einen Extruder her, der Plastikfolie produziert (indem er eine dickflüssige Plastikmasse unter hohem Druck und hoher Temperatur gleichmäßig aus einer Düse presst). Die Tagesproduktion umfasst 800 Einheiten. 40 davon sind fehlerhaft.

Sie ziehen zufällig nacheinander zwei Einheiten aus der Gesamtmenge, ohne diese zurückzulegen.

Lösung: A_i - i-te gezogene Einheit ist defekt, $i = 1, 2$.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide defekt sind?

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{40}{800} \cdot \frac{39}{799} = 0{,}002$$

---

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide nicht defekt sind?

$$P(A_1^c \cap A_2^c) = \frac{760}{800} \cdot \frac{759}{799} = 0{,}902$$

---

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die erste gezogene Einheit defekt ist und die zweite nicht?

$$P(A_1 \cap A_2^c) = \frac{40}{800} \cdot \frac{760}{799} = 0{,}048$$

---

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite gezogene Einheit defekt ist und die erste nicht?

$$P(A_1^c \cap A_2) = \frac{760}{800} \cdot \frac{50}{799} = 0{,}048$$

(Die Summe von a) bis d) ist 1, da die Ereignisse

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 \cap A_2 \\ B_2 &= A_1^c \cap A_2^c \\ B_3 &= A_1 \cap A_2^c \\ B_4 &= A_1^c \cap A_2 \end{aligned}$$

eine Zerlegung von Ω bilden.)

e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite gezogene Einheit defekt ist, wenn Sie wissen, dass die erste schon defekt ist?

$$P(A_2|A_1) = \frac{39}{799}$$

oder

$$\begin{aligned} P(A_2|A_1) &= \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \\ &= \frac{\frac{40}{800} \cdot \frac{39}{799}}{\frac{40}{800}} = \frac{39}{799} \end{aligned}$$

f) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite gezogene Einheit defekt ist, wenn Sie wissen, dass die erste nicht defekt ist?

$$P(A_2|A_1^c) = \frac{40}{799}$$

oder

$$\begin{aligned} P(A_2|A_1^c) &= \frac{P(A_1^c \cap A_2)}{P(A_1^c)} \\ &= \frac{\frac{760}{800} \cdot \frac{40}{799}}{\frac{760}{800}} = \frac{40}{799} \end{aligned}$$

g) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite gezogene Einheit defekt ist?

$$P(A_2) = P(A_2 \cap A_1) + P(A_2 \cap A_1^c) = \ldots = \frac{40}{800} = 0{,}05$$

6. Aufgabe: Die Wahrscheinlichkeit für ein gewisses Bauteil, sechs Monate funktionstüchtig zu sein, betrage 0,97. Die Wahrscheinlichkeit, zwei Jahre zu funktionieren, sei 0,88. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für ein sechs Monate altes funktionstüchtiges Bauteil, nach weiteren eineinhalb Jahren immer noch zu funktionieren?

Lösung:
A - Bauteil funktioniert noch nach 6 Monaten
B - Bauteil funktioniert noch nach 2 Jahren

$$\begin{aligned} P(A) &= 0{,}97 \\ P(B) &= 0{,}88 \end{aligned}$$

$$B \subseteq A \qquad \Longrightarrow \qquad P(A \cap B) = P(B) = 0{,}88$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{0{,}88}{0{,}97} = \underline{0{,}907}$$
