Statistik für Ingenieure
2 Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Prof. Dr. Hans-Jörg Starkloff

TU Bergakademie Freiberg
Institut für Stochastik

Wintersemester 2019/2020
letzte Änderung: 22.10.2019

2 Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

2.1 Zufällige Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten

- Zufälliger Versuch (Zufallsexperiment, Zufallssituation): Vorgang unter genau festgelegten Bedingungen, der (zumindest gedanklich) beliebig oft wiederholbar ist und dessen Ausgang oder Ergebnis (innerhalb einer Menge möglicher Ergebnisse) ungewiß ist.
- Zufälliges Ereignis (kurz Ereignis): Teilmenge möglicher Ergebisse, so dass man nach Realisierung des zufälligen Versuches entscheiden kann, ob es eingetreten ist oder nicht (sowie Idealisierungen).
- **Bsp.:**

Versuch	Ereignis
Werfen eines Spielwürfels	Werfen einer „6“
Kontrolle einer Warenlieferung	≤ 3 Ausschussteile

- Bezeichnung von Ereignissen: $A, B, A_1, A_2, B_i, \ldots$.
- **Wichtig:** Bei Lösung von Aufgaben bzw. Modellierung genaue Definitionen der betrachteten zufälligen Ereignisse!

Zufällige Ereignisse

Geg.: zufällige Ereignisse $A, B, C, A_1, A_2, \ldots$ zu einem Zufallsversuch.

- Zu A entgegengesetztes (komplementäres) Ereignis A^c $(= \neg A = \overline{A})$: tritt genau dann ein, wenn A nicht eintritt.
- Vereinigung $A \cup B$: A **oder** B (oder beide) treten ein; analog: $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots$: mindestens eines der Ereignisse $A_1, A_2, A_3, \ldots$ tritt ein.
- Durchschnitt $A \cap B$: A **und** B treten (gemeinsam) ein; analog: $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots$: die Ereignisse $A_1, A_2, A_3, \ldots$ treten gemeinsam (bei einer Realisierung des Zufallsversuchs) ein.
- Sicheres Ereignis Ω : tritt immer ein (auch Ergebnisraum genannt).
- Unmögliches Ereignis $\varnothing$: tritt niemals ein.
- A und B sind unvereinbar (sind disjunkt, schließen einander aus) : sie können nicht gemeinsam eintreten, d.h. $A \cap B = \varnothing$.
- Das Ereignis A zieht das Ereignis B nach sich, $A \subseteq B$: wenn A eintritt, dann tritt auch B ein.

Einige Rechenregeln für zufällige Ereignisse

- Das sichere Ereignis Ω kann als Menge der möglichen Versuchsergebnisse aufgefasst werden, die Elemente sind die Elementarereignisse $\omega_1, \omega_2, \ldots$.
- Rechenregeln wie in der Mengenlehre, Skizzen können helfen.
- Für alle Ereignisse A zu einem zufälligen Versuch gilt: $A \subseteq \Omega$.
- $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ (Kommutativität).
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (Assoziativität).
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (Distributivität).
- $A \cup A^c = \Omega$, $A \cap A^c = \varnothing$.
- Regeln von de Morgan: (analog auch für größere Anzahl)
  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$, $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

Zerlegung (vollständiges Ereignissystem)

- Die zufälligen Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ bilden eine Zerlegung von Ω (bilden ein vollständiges Ereignissystem), wenn bei jeder Realisierung des Zufallsversuches genau eines der Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eintritt, d.h. die Ereignisse A_i sind paarweise unvereinbar $(A_i \cap A_j = \varnothing,\ \text{falls } i \neq j)$ und es gilt
$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega \quad \text{(Fallunterscheidung).}$$
- Einfachster Fall: $\Omega = A \cup A^c$ für ein zufälliges Ereignis A.

Übungsaufgabe

Die Arbeit eines Kraftwerkes werde durch drei unabhängig voneinander arbeitende Kontrollsysteme (kurz „Systeme") überwacht, die jedoch auch einer gewissen Störanfälligkeit unterliegen. Es bezeichne S_i das Ereignis, dass das i-te System störungsfrei arbeitet $(i = 1, 2, 3)$.

Drücken Sie folgende Ereignisse mit Hilfe der Ereignisse S_1, S_2 und S_3 aus:

- A ... „Alle Systeme arbeiten störungsfrei."
- B ... „Kein System arbeitet störungsfrei."
- C ... „Mindestens ein System arbeitet störungsfrei."
- D ... „Genau ein System arbeitet störungsfrei."
- E ... „Höchstens zwei Systeme sind gestört."

Wahrscheinlichkeiten

- In einem stochastischen Modell wird jedem zufälligen Ereignis zu einem Zufallsversuch eine Zahl zwischen 0 und 1 zugewiesen, die sogenannte Wahrscheinlichkeit (für das Eintreten des Ereignisses).
- **Hintergrund:** Eigenschaften der relativen Häufigkeiten

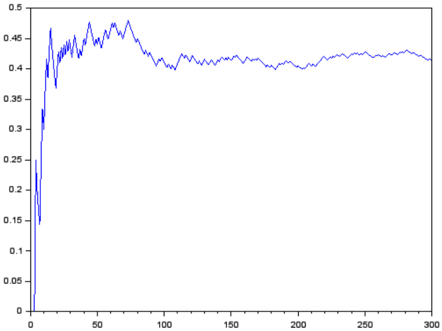
$$h_n(A) = \frac{H_n(A)}{n},$$

  mit $H_n(A)$ als absolute Häufigkeit des Eintretens des zufälligen Ereignisses A in n unabhängigen Versuchswiederholungen.
- Für $A \subseteq B \subseteq \Omega$ gilt $0 \leq h_n(A) \leq h_n(B) \leq h_n(\Omega) = 1$.
- Für $A \cap B = \varnothing$ gilt $h_n(A \cup B) = h_n(A) + h_n(B)$.
- **Erfahrungstatsache:**
  Für $n \to \infty$ „konvergiert“ $h_n(A)$ oft gegen eine feste reelle Zahl („Stabilisierung der relativen Häufigkeiten“).

Stabilisierung der relativen Häufigkeiten – Beispiel

Ergebnisse von 300 durchgeführten Würfen einer Reißzwecke auf einen Steinboden mit den beiden möglichen Ergebnissen *„Spitze nach oben"* $\widehat{=}$ *„1"* und *„Spitze schräg nach unten"* $\widehat{=}$ *„0"*.

Fortlaufend notierte relative Häufigkeiten für *„1"*:



Quelle: N. Henze, Stochastik für Einsteiger, 2013, 10. Aufl., Kap. 4 .

Axiome von Kolmogorow 1933

- **Bezeichnung:** $\mathbf{P}(A)$ Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A.
- **Axiome:**
  1. $0 \leq \mathbf{P}(A) \leq 1$;
  2. $\mathbf{P}(\Omega) = 1$;
  3. $\mathbf{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \ldots$, falls die Ereignisse A_i paarweise unvereinbar sind, d.h. $A_i \cap A_j = \varnothing$ $(i \neq j)$.
- **Bemerkung:** Jede Zuweisung der Wahrscheinlichkeitswerte zu den zufälligen Ereignissen zu einem Zufallsversuch, die diese Axiome erfüllt, ist aus mathematischer Sicht korrekt (unabhängig davon, ob sie die Realität gut beschreibt).
- **Folgerungen:**

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B), \quad \text{falls} \quad A \cap B = \varnothing \quad \text{(Additionssatz)};$$

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B);$$

$$\mathbf{P}(A^c) = 1 - \mathbf{P}(A);$$

$$A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B).$$

Beispielaufgabe

Für die Ereignisse A und B seien folgende Wahrscheinlichkeiten bekannt:
$\mathbf{P}(A) = 0.25\,, \quad \mathbf{P}(B) = 0.45\,, \quad \mathbf{P}(A \cup B) = 0.5\,.$

Berechnen Sie

1. $\mathbf{P}\left(A \cap B^{\mathsf{c}}\right)$
2. $\mathbf{P}\left(A^{\mathsf{c}} \cap B^{\mathsf{c}}\right)$
3. $\mathbf{P}\left((A \cap B^{\mathsf{c}}) \cup (A^{\mathsf{c}} \cap B)\right)$

Praktisch sichere und praktisch unmögliche Ereignisse

- Ein zufälliges Ereignis A mit $\mathbf{P}(A) = 1$ wird auch fast sicheres Ereignis genannt, ein Ereignis B mit $\mathbf{P}(B) = 0$ ein fast unmögliches Ereignis.
- In Anwendungen spielen oft praktisch sichere bzw. praktisch unmögliche zufällige Ereignisse eine große Rolle, dies sind zufällige Ereignisse mit einer Wahrscheinlichkeit nahe bei 1 bzw. nahe bei 0. Bei einer einmaligen Realisierung eines Zufallsversuches kann man sich sehr sicher sein, dass ein praktisch sicheres Ereignis auch tatsächlich eintritt und ein praktisch unmögliches Ereignis auch tatsächlich nicht eintritt, dies kann aber nicht garantiert werden (auch allgemein bei fast sicheren bzw. fast unmöglichen Ereignissen).
- Wie nah der Wert der Wahrscheinlichkeit bei 1 bzw. 0 liegen sollte, hängt von der Situation (und den Folgen bei einer Fehlentscheidung) ab.

Beispiel

Wirft man 1000 mal eine symmetrische Münze (oder 100 mal 10 gleichartige symmetrische Münzen), dann kann man recht sicher sein, dass die Anzahl der Fälle, in denen Wappen oben ist, zwischen 453 und 547 liegt (die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt ungefähr 0.997).

Eine 100%ig richtige Aussage ist jedoch nur derartig möglich, dass die Anzahl der Fälle, in denen Wappen oben ist, zwischen 0 und 1000 liegt.

2.2 Klassische Wahrscheinlichkeiten (LAPLACE-Modell)

- Für Zufallsversuche mit
  - endlich vielen möglichen Versuchsergebnissen ($n \in \mathbb{N}$ elementare Versuchsausgänge oder Elementarereignisse $\omega_1, \ldots, \omega_n$),
  - die alle gleichwahrscheinlich sind (keines wird bevorzugt, alle haben dieselbe Chance einzutreten).
- **Beispiele:**
  - Würfeln mit einem fairen oder gerechten Würfel,
    $n = 6$, Elementarereignisse sind $1, 2, 3, 4, 5, 6$.
  - Zahlenlotto „6 aus 49",
    $n =$ Anzahl der möglichen Tipps mit 6 aus 49 Zahlen.
- Aus den Axiomen für Wahrscheinlichkeiten folgt dann die einzige mögliche Definition von Wahrscheinlichkeiten in dieser Situation (die sogenannte klassische Wahrscheinlichkeitsdefinition).

Klassische Wahrscheinlichkeitsdefinition

- Für jedes der n Elementarereignisse $\omega_k, k = 1, \ldots, n$, gilt dann:

$$\mathbf{P}(\{\omega_k\}) = \frac{1}{n}\,.$$

- Für ein beliebiges Ereignis A gilt unter obigen Bedingungen:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\text{Anzahl der Elementarereignisse in } A}{n} \qquad \text{bzw.}$$

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ \textbf{günstigen} Fälle}}{\text{Anzahl \textbf{aller möglicher} gleichwahrscheinlicher Fälle}}\,.$$

- **Beispiel:** Zweimaliges Würfeln mit einem fairen Würfel, $A = \{$„Augensumme mindestens 10“$\}$.
- Bei Wahrscheinlichkeitsberechnungen im Zusammenhang mit der klassischen Wahrscheinlichkeitsdefinition werden oft kombinatorische Formeln genutzt.

Das Paradoxon von DE MÉRÉ

Der Franzose DE MÉRÉ schaute oft beim Würfelspiel zu und beobachtete, dass beim gleichzeitigen Werfen dreier Spielwürfel als Augensumme die Zahl 11 (Ereignis A_{11}) häufiger als die Zahl 12 (Ereignis A_{12}) auftrat, obwohl beide Ergebnisse von seinem Standpunkt aus gleichwahrscheinlich zu sein schienen.
DE MÉRÉ stellte nämlich folgende Überlegung an.

- Möglichkeiten für Augensumme 11: Kombinationen

$$6-4-1,\ 6-3-2,\ 5-5-1,\ 5-4-2,\ 5-3-3,\ 4-4-3\,.$$

- Möglichkeiten für Augensumme 12: Kombinationen

$$6-5-1,\ 6-4-2,\ 6-3-3,\ 5-5-2,\ 5-4-3,\ 4-4-4\,.$$

Tatsächlich gilt aber

$$\mathbf{P}(A_{11}) = \frac{27}{216} = 0.125 > 0.116 \approx \frac{25}{216} = \mathbf{P}(A_{12})\,.$$

(Quelle: J.A. Rosanow, Wahrscheinlichkeitstheorie, 1970, S.8f.)

2.3 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

- Häufig ist es nützlich, Bedingungen zu berücksichtigen, welche die Zufälligkeit einschränken.
- **Beispiel:** Zufälliges Ziehen einer Kugel aus einer Urne
  - Insgesamt 11 weiße und 6 schwarze Kugeln;
  - von den 17 Kugeln sind 8 Kugeln (6 weiße und 2 schwarze) markiert;
  - die restlichen 9 Kugeln (5 weiße und 4 schwarze) sind unmarkiert.
  - Ereignis S ... „gezogene Kugel ist schwarz“ ;
  - Ereignis M ... „gezogene Kugel ist markiert“ ;
  - Ereignis U ... „gezogene Kugel ist unmarkiert“ .
- Ohne Bedingung: $\mathbf{P}(S) = \frac{6}{17}$, $\mathbf{P}(S \cap M) = \frac{2}{17}$, $\mathbf{P}(S \cap U) = \frac{4}{17}$.
- Einschränkung auf markierte Kugeln:

  $\mathbf{P}(S|M) = \frac{2}{8}$, $\mathbf{P}(M) = \frac{8}{17}$, d.h. $\mathbf{P}(S|M) = \frac{\mathbf{P}(S \cap M)}{\mathbf{P}(M)}$.
- Einschränkung auf unmarkierte Kugeln:

  $\mathbf{P}(S|U) = \frac{4}{9}$, $\mathbf{P}(U) = \frac{9}{17}$, d.h. $\mathbf{P}(S|U) = \frac{\mathbf{P}(S \cap U)}{\mathbf{P}(U)}$.

Allgemeine Definition bedingter Wahrscheinlichkeiten

- Bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B:

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}, \qquad \text{falls } \mathbf{P}(B) \neq 0.$$

  (A, B sind zufällige Ereignisse zu einem Zufallsversuch.)

- *Wichtig:* Im Allgemeinen gilt $\mathbf{P}(A|B) \neq \mathbf{P}(B|A)$!

- Bei fester Bedingung B kann man wie mit (unbedingten) Wahrscheinlichkeiten rechnen, z.B. $\mathbf{P}(A^c|B) = 1 - \mathbf{P}(A|B)$.

- Diese Definition korrespondiert zu der Häufigkeitsinterpretation von Wahrscheinlichkeiten:
  $H_n(B)$ Versuchswiederholungen, bei denen B eingetreten ist;
  darunter $H_n(A \cap B)$ Versuchswiederholungen, bei denen zusätzlich A eingetreten ist;

$$\mathbf{P}(A|B) \approx \frac{H_n(A \cap B)}{H_n(B)} = \frac{h_n(A \cap B)}{h_n(B)} \approx \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Multiplikationsregeln

- **Multiplikationsregel:** $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A|B) \cdot \mathbf{P}(B)$.
- **Erweiterte Multiplikationsregel:** Sind $A_1, \ldots, A_n$ zufällige Ereignisse mit $\mathbf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$, dann gilt

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1) \cdot \mathbf{P}(A_2|A_1) \cdot \mathbf{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}).$$

- In bestimmten Fällen werden diese Formeln auch zur Definition der entsprechenden Wahrscheinlichkeiten genutzt.
- **Übungsbeispiel:** In einer Urne befinden sich 7 rote und 3 schwarze Kugeln. Es werden nacheinander 4 Kugeln zufällig ohne Zurücklegen entnommen.

  Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A, dass alle 4 gezogenen Kugeln rot sind?

Formel der totalen Wahrscheinlichkeit

- Berechnung der totalen (unbedingten) Wahrscheinlichkeit aus den bedingten Wahrscheinlichkeiten als gewichtetes Mittel !
- Sei $B_1, \ldots, B_n$ eine Zerlegung von Ω mit $\mathbf{P}(B_i) \neq 0, i = 1, \ldots, n$. Dann gilt die Formel der totalen Wahrscheinlichkeit: für ein beliebiges zufälliges Ereignis $A \subseteq \Omega$ ist

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A|B_i)\mathbf{P}(B_i)\,.$$

- Bei einer Zerlegung $\Omega = B \cup B^c$ gilt

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A|B)\mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(A|B^c)\mathbf{P}(B^c)\,.$$

- Im Beispiel mit dem Ziehen einer Kugel gilt

$$\mathbf{P}(S) = \mathbf{P}(S|M) \cdot \mathbf{P}(M) + \mathbf{P}(S|U) \cdot \mathbf{P}(U)\,,$$
$$\frac{6}{17} = \frac{2}{8} \cdot \frac{8}{17} + \frac{4}{9} \cdot \frac{9}{17}\,.$$

Übungsaufgabe

Drei Zulieferer liefern eine Komponente zur Produktion eines Erzeugnisses im Anzahlverhältnis 5 : 3 : 2.

Die Fehlerquote betrage bei Komponenten der 1. Zulieferfirma 7%, bei Komponenten der 2. Zulieferfirma 4% und bei Komponenten der 3. Zulieferfirma 2%.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine aus der Gesamtliefermenge rein zufällig ausgewählte Komponente fehlerhaft ist?

Formel von Bayes

- Unter den Bedingungen des Satzes der totalen Wahrscheinlichkeit und unter der Voraussetzung $\mathbf{P}(A) > 0$ gilt die Formel von Bayes

$$\mathbf{P}(B_i|A) = \frac{\mathbf{P}(A|B_i)\mathbf{P}(B_i)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}(A|B_i)\mathbf{P}(B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \mathbf{P}(A|B_j)\mathbf{P}(B_j)} .$$

- $\mathbf{P}(B_i)$ heißen auch a-priori-Wahrscheinlichkeiten (für die Ereignisse B_i).
- $\mathbf{P}(B_i|A)$ heißen auch a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten,

  sie liefern eine Korrektur der ursprünglichen Wahrscheinlichkeiten, wenn bekannt ist, dass das zufällige Ereignis A eingetreten ist oder dies angenommen wird.

Übungsaufgabe

Für die Situation der obigen Übungsaufgabe mit den 3 Zulieferbetrieben wurde eine Komponente aus der Gesamtzuliefermenge rein zufällig ausgewählt und überprüft.

Dabei wurde festgestellt, dass die Komponente defekt ist.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammte diese Komponente von der 1. Zulieferfirma ?

Beispiel Diagnoseverfahren

- Diagnoseverfahren liefern im Allg. nicht 100%ig richtige Ergebnisse:
  - Ein Fehler wird nicht erkannt.
  - Ein Fehler wird fälschlicherweise angezeigt.
- **Resultierende Frage:**
  Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter und als fehlerhaft angezeigter Gegenstand tatsächlich fehlerhaft ist ?
- **Beispiel:**

  F ... „Gegenstand ist tatsächlich fehlerhaft“ , $\mathbf{P}(F) = 0.001$.

  A ... „Gegenstand wird als fehlerhaft angezeigt“ .

  Wahrscheinlichkeit für eine Fehlererkennung: $\mathbf{P}(A|F) = 0.9$.

  Wahrscheinlichkeit für die Identifizierung eines einwandfreien Gegenstandes: $\mathbf{P}(A^c|F^c) = 0.99$.

  Ges.: $\mathbf{P}(F|A)$.

2.4 Stochastische Unabhängigkeit

Definition:

- Zwei zufällige Ereignisse A und B zu einem Zufallsversuch heißen (stochastisch) unabhängig, wenn gilt

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)\,.$$

- Zufällige Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ zu einem Zufallsversuch heißen paarweise unabhängig, falls alle Paare von ausgewählten Ereignissen unabhängig sind, d.h.

$$\mathbf{P}(A_i \cap A_j) = \mathbf{P}(A_i) \cdot \mathbf{P}(A_j) \;\text{ für alle }\; i \neq j\,.$$

- Diese Ereignisse heißen in Gesamtheit oder total oder vollständig (stochastisch) unabhängig, falls eine entsprechende Formel für alle möglichen Auswahlen (nicht nur von Paaren) gilt, d.h. für alle $2 \leq k \leq n, \quad 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$ gilt

$$\mathbf{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \mathbf{P}(A_{i_1}) \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}(A_{i_k})\,.$$

Beispiel und Eigenschaften unabhängiger Ereignisse

- **Beispiel:** Zweifacher Münzwurf mit symmetrischer Münze
  A ... „1. Wurf Zahl“, B ... „2. Wurf Zahl“,
  $$\mathbf{P}(A) = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{P}(B) = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{P}(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\,.$$
- **Satz** A und B seien unabhängige Ereignisse zu einem Zufallsversuch. Dann sind auch die zufälligen Ereignisse A und das Komplement von B, also B^c, stochastisch unabhängig. Ebenso sind in diesem Fall A^c und B sowie auch A^c und B^c jeweils stochastisch unabhängige Ereignisse.
- Aus der paarweisen Unabhängigkeit der Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ folgt im Allgemeinen nicht deren totale Unabhängigkeit.
- Die Unabhängigkeit von Ereignissen (im Allg. die totale) wird der Einfachheit halber häufig vorausgesetzt, gezwungenermaßen oft auch dann, wenn sie sachlich schwer begründbar ist.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten für unabhängige Ereignisse

Sind zwei zufällige Ereignisse A, B stochastisch unabhängig, dann gelten (falls $\mathbf{P}(B) > 0$ bzw. $\mathbf{P}(A) > 0$)

$$\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B)\,,$$

d.h. die bedingten Wahrscheinlichkeiten sind gleich den unbedingten Wahrscheinlichkeiten der beiden Ereignisse. Entsprechende Formeln gelten auch für mehr als 2 in Gesamtheit unabhängige Ereignisse.

Anwendung in Zuverlässigkeitstheorie

Betrachten Serien- (Reihen-) und Parallelsysteme von Elementen (Bauteilen, Teilsystemen etc.), die vollständig unabhängig voneinander funktionstüchtig sind oder ausfallen.

- 2 Elemente E_1, E_2; Ereignisse F_i ... „Element E_i funktioniert“, $\mathbf{P}(F_i) = p_i$, F_i stochastisch unabhängig $(i = 1, 2)$, F ... „System funktioniert“.
- Das Seriensystem funktioniert, wenn sowohl E_1 als auch E_2 funktionieren, d.h. der Ausfall bereits eines Elements zum Systemausfall führt:

$$\mathbf{P}(F) = \mathbf{P}(F_1 \cap F_2) = \mathbf{P}(F_1) \cdot \mathbf{P}(F_2) = p_1 \cdot p_2 .$$

- Das Parallelsystem funktioniert, wenn E_1 oder E_2 oder beide Elemente funktionieren (mindestens ein Element funktioniert):

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(F) &= \mathbf{P}(F_1 \cup F_2) = 1 - \mathbf{P}\left(F_1{}^{c} \cap F_2{}^{c}\right) \\ &= 1 - (1 - p_1) \cdot (1 - p_2) = p_1 + p_2 - p_1 \cdot p_2 . \end{aligned}$$

Redundante Systeme

- Seriensysteme aus vielen Elementen erfordern oft eine sehr hohe Funktionswahrscheinlichkeit der Arbeitselemente, die meist nicht realisierbar ist. Deshalb werden Reserveelemente eingebaut.
- Das entstehende System ist dann kein Seriensystem mehr und ist strukturell redundant (lateinisch: redundantia = Überfülle).
- Es gibt 3 Arten der strukturellen Redundanz:
  - Kalte Redundanz (unbelastete Redundanz oder Reserve):
    Im Reservezustand sind die Elemente keinerlei Beanspruchungen ausgesetzt, können also nicht ausfallen.
  - Warme Redundanz (erleichterte Redundanz oder Reserve):
    Die Reserveelemente sind geringeren Beanspruchungen ausgesetzt, die Ausfallwahrscheinlichkeit ist geringer als die der Arbeitselemente.
  - Heiße Redundanz (belastete Redundanz oder Reserve):
    Die Reserveelemente sind den gleichen Beanspruchungen ausgesetzt wie die Arbeitselemente, besitzen also auch entsprechende Ausfallwahrscheinlichkeiten.