Statistik II für Betriebswirte
Vorlesung 15

Dr. Andreas Wünsche

TU Bergakademie Freiberg
Institut für Stochastik

03. Februar 2020

8.3. Kontrollkarten

- Ziel ist die laufende Kontrolle der Produktion.
- In regelmäßigen Abständen werden kleine Stichproben entnommen, aufgrund derer entschieden wird, ob die Fertigung wie gewünscht verläuft oder ob Störungen aufgetreten sind, die ein Eingreifen in den Produktionsprozess erforderlich machen.
- **Hilfsmittel zur Entscheidung:** Kontrollkarten (engl.: "control charts"), auch Qualitätsregelkarten oder Regelkarten.
- Auf den Kontrollkarten werden statistische Stichprobenkennwerte (z.B. Stichprobenmittelwert und Stichprobenstandardabweichung eines Werkstückmaßes) grafisch dargestellt.
- Meist werden auch Warn- und Eingriffsgrenzen auf den Kontrollkarten eingezeichnet.
- Grundlage ist ein statistischer Test, der für die Praxis aufbereitet ist und eine laufende Überwachung der Produktion gestattet, da er direkt in den Fertigungsprozess eingeschaltet ist.

8.3.1 Mittelwertkarte ($\overline{x}$−Karte)

- Erklärung der Vorgehensweise am Beispiel der Mittelwertkarte ($\overline{x}$−Karte).
- Das Merkmal X sei normalverteilt, $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, die Varianz σ^2 wird (vorerst) als bekannt angesehen.
- Gegeben sei ein Sollwert a für den Erwartungswert $\mu = \mathbf{E}X$.
- Zu Zeitpunkten t_j, $j = 1, 2, \ldots$ (meist gleichmäßig verteilt) werden die letzten n von der Maschine gefertigten Erzeugnisse entnommen und die Werte des Merkmals gemessen, so erhält man die konkreten Stichproben $x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}$.
- Für jede dieser Stichproben wird der Signifikanztest mit

$$\mathrm{H}_0 : \mu = a \qquad \text{gegen} \qquad \mathrm{H}_A : \mu \neq a$$

durchgeführt.

Kontrollgrenzen

- Dabei wird H_0 **nicht abgelehnt**, falls gilt

$$K_u := a - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \overline{x}^{(j)} < a + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} =: K_o \,.$$

- Hier ist $\overline{x}^{(j)}$ der Mittelwert der Stichprobe vom Umfang n zum Zeitpunkt t_j , $j = 1, 2, \ldots$ und α ein vorgegebenes Signifikanzniveau.
- Die Grenzen K_u und K_o werden untere bzw. obere Kontrollgrenze genannt.
- In Europa wird üblicherweise $\alpha = 0.01$ gewählt, dies führt auf $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2.576$.
- In Amerika wird üblicherweise $\alpha = 0.0027$ gewählt, dies führt auf $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 3$.

Grafische Darstellung

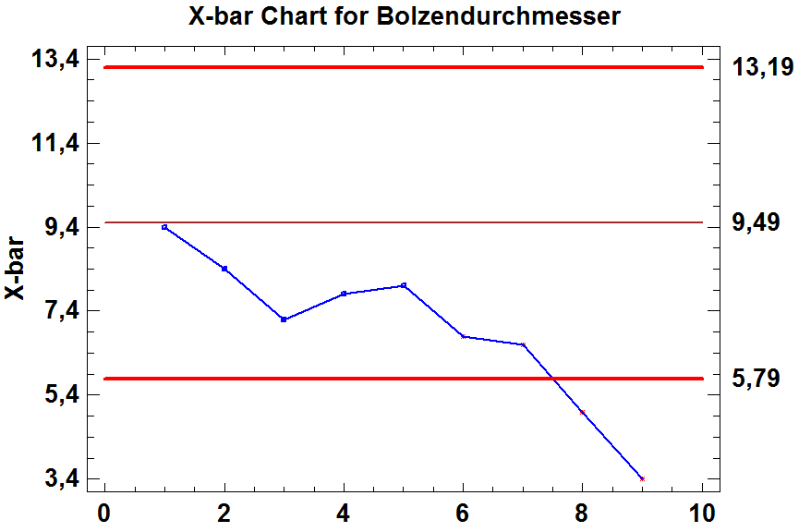
Die Kontrollkarte besteht in der Regel aus folgender grafischer Darstellung:

- die Stichprobenmittelwerte $\overline{x}^{(j)}$ werden im Zeitverlauf eingetragen;
- zusätzlich wird die Mittellinie (eine waagerechte Gerade in Höhe des Sollwertes a) angegeben;
- außerdem werden die Kontrollgrenzen (waagerechte Linien in Höhe von K_u bzw. K_o) eingezeichnet.
- Da bei geeigneter Wahl von α ein Überschreiten dieser Grenzen zum Eingriff in den Prozess führt, heißen sie auch Eingriffsgrenzen und werden mit UEG (untere Eingriffsgrenze, engl.: "LCL") bzw. OEG (obere Eingriffsgrenze, engl.: "UCL") bezeichnet.

Beispiel 8.4

- Die Merkmalsgröße X (Bolzendurchmesser) sei normalverteilt mit Standardabweichung $\sigma = 3.21$, der Sollwert betrage $a = 9.49$.
- Der Stichprobenumfang für t_j, $j = 1, \ldots, 9$, betrage 5.
- $K_u = 9.49 - 2.576 \cdot \frac{3.21}{\sqrt{5}} = 5.79$; $\quad K_o = 9.49 + 2.576 \cdot \frac{3.21}{\sqrt{5}} = 13.19.$
- In Statgraphics gelangt man zur Mittelwertkarte z.B. über (englische/deutsche Version):
  - SPC → Control Charts → Basic Variables Charts → X-bar and R Charts
  - SPC → Regelkarten → Klassische Regelkarten für messbare Regelkarten → x-quer/R-Karten

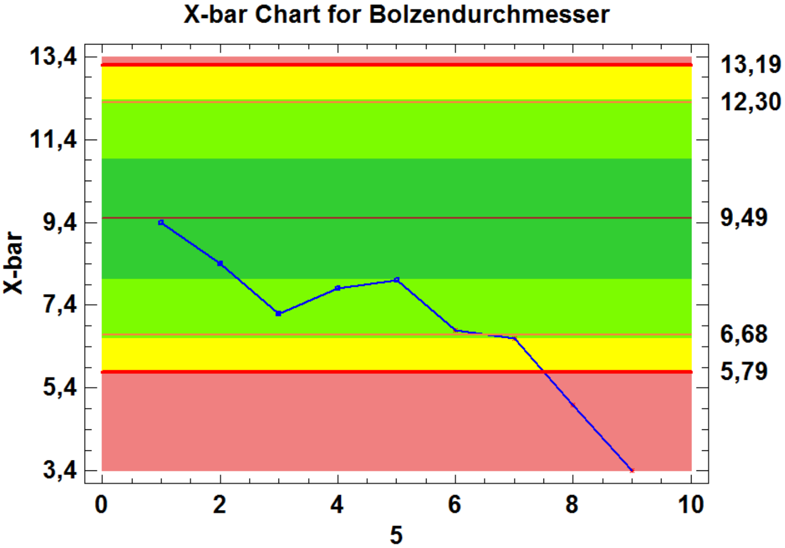
Kontrollkarte im Beispiel 8.4 mit Statgraphics



Das Prüfverfahren

- Solange sich der Wert $\overline{x}^{(j)}$ innerhalb des durch die Kontrollgrenzen K_u und K_o festgelegten Bereiches befindet, heißt der Prozess stabil oder in statistischer Kontrolle oder beherrscht (engl.: "process in control").
- Liegt der Punkt jedoch oberhalb von K_o oder unterhalb von K_u, ist der Prozess außer Kontrolle, dies ist ein Signal zur Unterbrechung des Produktionsprozesses und zur Überprüfung der Maschine (Einstellungen, Verschleißteile, etc.).
- Mitunter werden noch für einen Wert $\alpha = 0.05$ $(z_{0.975} = 1.96)$ und obige Formeln für die Grenzen die entsprechende untere bzw. obere Warngrenze mit in das Diagramm eingetragen.

Kontrollkarte mit Warngrenzen (Bsp.8.4 mit Statgraphics)



Mögliche Fehlentscheidungen

- Es erfolgt ein Eingriff in den Produktionsprozess, da die Kontrollgrenzen überschritten werden, **obwohl** der Prozess ungestört verläuft („blinder Alarm“).
- Die Wahrscheinlichkeit für diesen **Fehler 1. Art**

  $$\mathrm{H}_0 \text{ wird abgelehnt, obwohl } \mathrm{H}_0 \text{ richtig ist}$$

  ist durch die Irrtumswahrscheinlichkeit α des Tests festgelegt.
- Es erfolgt kein Eingriff, da die Kontrollgrenzen nicht überschritten werden, **obwohl** der Prozess gestört ist („unterlassener Alarm“).
- Die Wahrscheinlichkeit für diesen **Fehler 2. Art**

  $$\mathrm{H}_0 \text{ wird nicht abgelehnt, obwohl } \mathrm{H}_0 \text{ falsch ist}$$

  hängt von dem tatsächlichen Erwartungswert $\mu\,(\neq a)$ des Merkmals X ab. Sie kann durch die Gütefunktion charakterisiert werden.

Eingriffskennlinie (Gütefunktion)

- Die Gütefunktion gibt die Wahrscheinlichkeit (in Abhängigkeit vom tatsächlichen Erwartungswert μ) an, mit der H_0 durch den Test abgelehnt wird.
- Sie wird hier Eingriffskennlinie genannt, da eingegriffen wird, falls H_0 abgelehnt wird.
- **Bezeichnung:**

$$g(\mu) = g_1(\delta) \, ,$$

wobei $\delta = \dfrac{\mu - a}{\sigma}$ die Abweichung des gestörten vom ungestörten Prozess (in Einheiten von σ) zum Ausdruck bringt.

Gütefunktion für den betrachteten Test

- Wenn μ der tatsächliche Erwartungswert von X ist, so gilt

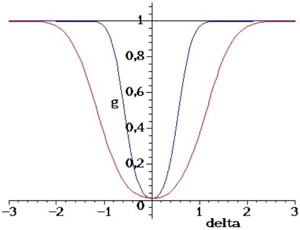
$$\overline{X} \sim \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \Rightarrow \qquad Z := \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\overline{X} - \mu\right) \sim \mathrm{N}(0,1)\,.$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
g(\mu) &= P_\mu(\mathrm{H}_0 \text{ wird abgelehnt}) \\
&= 1 - P_\mu\left(a - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \overline{X} < a + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \\
&= 1 - P_\mu\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(a - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \mu\right) < \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\overline{X} - \mu\right)\right. \\
&\qquad\qquad \left. < \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(a + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \mu\right)\right) \\
&= 1 - P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} - \delta\sqrt{n} < Z < z_{1-\frac{\alpha}{2}} - \delta\sqrt{n}\right) \\
&= \Phi\left(\delta\sqrt{n} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) + \Phi\left(-\delta\sqrt{n} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) =: g_1(\delta)\,.
\end{aligned}$$

Gütefunktion für unterschiedliche Stichprobenumfänge

- Eingriffskennlinie für den betrachteten Test mit $n = 5$ (rot) und $n = 20$ (blau):



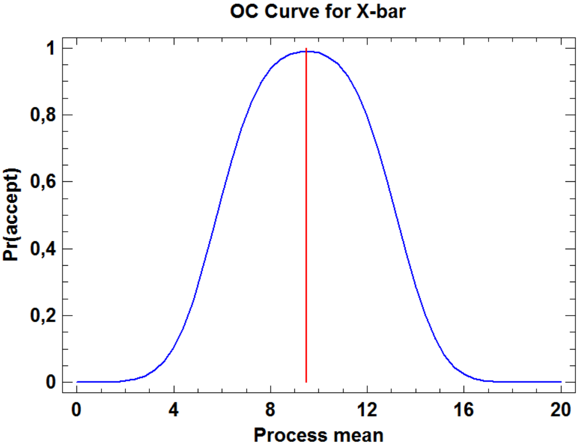
- Wahrscheinlichkeit des Eingriffs $g(\mu)$ bei $\alpha = 0.01$:

μ	a	$a \pm \sigma$	$a \pm 2\sigma$	$a \pm 3\sigma$
$\lvert\delta\rvert$	0	1	2	3
$n = 5$	0.01	0.367	0.971	1.000
$n = 20$	0.01	0.971	1.000	1.000

OC-Funktion im Beispiel 8.4 mit Statgraphics

In Statgraphics wird bei der Kontrollkarte nicht die Gütefunktion, sondern die OC-Funktion bestimmt:

$$L(\mu) = 1 - g(\mu).$$



Erwartete Lauflänge

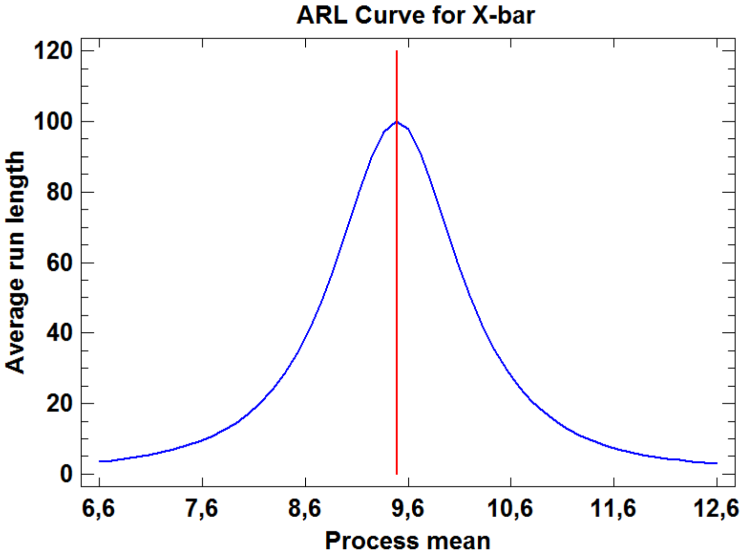
- Als Lauflänge N bezeichnet man die (zufällige) Anzahl der Kontrollen bis zum ersten Eingriff.
- $p = g(\mu) = g_1(\delta)$ ist die Wahrscheinlichkeit eines Eingriffs für einen festen Zeitpunkt.
- Unter der Annahme, dass sich μ im Verlauf der Produktion nicht verändert, ist die Zufallsgröße N geometrisch verteilt:

$$P_\mu(N = k) = (1-p)^{k-1} p\,, \quad k = 1, 2, 3, \ldots\,.$$

- Die mittlere Lauflänge ("ARL", "Average Run Length") ist somit $\mathbf{E}_\mu N = \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{g(\mu)} = \dfrac{1}{g_1(\delta)}$.
- Ungestörter Fertigungsprozess (d.h. $\mu = a$) $\Rightarrow$ $\mathbf{E}_\mu N = \dfrac{1}{g(a)} = \dfrac{1}{\alpha}$

  (für $\alpha = 0.01$ erfolgt im Mittel nach 100 Stichproben ein blinder Alarm).

Erwartete Lauflänge im Beispiel 8.4 mit Statgraphics



8.3.2 Der Fall geschätzter Parameter

- In der Praxis sind oft die Parameter $\mu = a$ und σ der normalverteilten Grundgesamtheit unbekannt, sie müssen geschätzt werden (aus den Daten einer Stichprobe, die Vorlauf genannt wird, mit mindestens 100 bis 150 Teilen der laufenden Produktion).
- Bei einem geplanten Stichprobenumfang von z.B. $n = 5$ für die Kontrollkarte sollten also $k = 20$ (bis $k = 30$) Untergruppen von je 5 Erzeugnissen untersucht werden, die entsprechenden Werte seien wieder $x_i^{(j)}$.
- Der Erwartungs- oder Sollwert a kann durch den arithmetischen Mittelwert geschätzt werden:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{k \cdot n} \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} x_i^{(j)} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \overline{x}^{(j)}$$

mit $\overline{x}^{(j)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^{(j)},\ j = 1, \ldots, k$ (Mittelwert der Untergruppe).

Schätzung der Standardabweichungen

- Bei der Schätzung der Standardabweichung σ ist zu beachten, dass S^2 eine erwartungstreue Schätzung für die Varianz σ^2, jedoch $S = \sqrt{S^2}$ **keine** erwartungstreue Schätzung für die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ (und die Stichprobenzahl n üblicherweise hier nicht groß) ist.

- Genauer gilt bei einem Stichprobenumfang von n die Beziehung

$$\mathbf{E}S = a_n\sigma \qquad \text{mit} \qquad a_n = \sqrt{\frac{2}{n-1}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\,.$$

Schätzung der Standardabweichungen

3 Möglichkeiten zur Schätzung der Standardabweichung sind:

1. die direkte Schätzung aus allen $m = k \cdot n$ Beobachtungswerten $x_i^{(j)}$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, k$,

$$s_m = \sqrt{\frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^{(j)} - \hat{\mu} \right)^2},$$

   es gilt $\mathbf{E} S_m = a_m \sigma$ mit z.B. $a_{100} = 0.9975$;

2. die Schätzung durch das arithmetische Mittel $\overline{s}$ der empirischen Standardabweichungen der k Untergruppen vom Umfang n,

   es gilt $\mathbf{E} \overline{S} = a_n \sigma$ mit z.B. $a_5 = 0.940$,

   um eine erwartungstreue Schätzung zu erhalten, verwendet man den korrigierten Wert $\overline{s}^* = \overline{s} / a_n$;

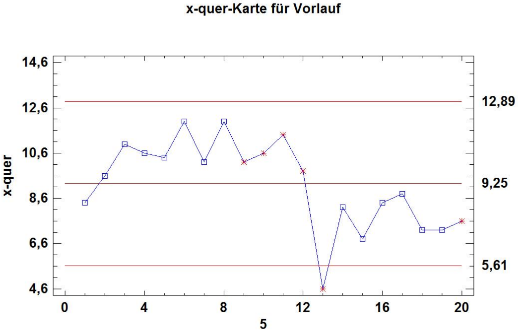
3. eine Schätzung auf Basis der empirischen Spannweiten der k Untergruppen.

Schätzung der Parameter im Beispiel 8.4

- Wir schätzen die Parameter im Beispiel 8.4 (Fortsetzung) mit Hilfe von Statgraphics (Daten stammen aus STORM, Abschnitt 21.2, Beispiel 21-2).
- *In Statgraphics muss man dazu unter (in englischer/deutscher Version):*
  SPC → Control Charts → Basic Variables Charts → X-bar and S Charts /
  SPC → Regelkarten → Klassische Regelkarten für messbare Regelkarten → x-quer/S-Karten
  im Fenster
  X-bar and S Chart Options / x-quer/S-Karte: Optionen
  den Punkt
  Initial Study / Vorlaufuntersuchung
  aktivieren.

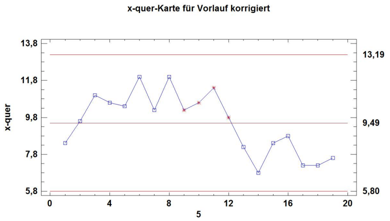
Schätzung der Parameter im Beispiel 8.4 (Fortsetzung)

- Statgraphics schätzt bei *x-quer/S-Karte* die Standardabweichung nach Methode 2 und bei *x-quer/R-Karte* nach Methode 3 (jeweils Prozess-sigma).
- Im Beispiel erhält man $\overline{x} = 9.25$ und $\overline{s}^* = 3.16$.
- Mittelwertkarte für den Vorlauf



Schätzung der Parameter im Beispiel 8.4 (Fortsetzung)

- Normalerweise müsste man mit Hilfe statistischer Tests prüfen, ob der Vorlauf tatsächlich **störungsfrei** läuft, z.B. durch
  - Test auf Normalverteiltheit der Stichproben mit den geschätzten Parametern (z.B. Shapiro-Wilk-Test);
  - Test auf Gleichheit der k Varianzen (z.B. Bartlett-Test);
  - Test auf Gleichheit der k Mittelwerte (Varianzanalyse, F-Test).
- In der Praxis häufig anderes Vorgehen: Streichen der Stichproben, die außerhalb der Kontrollgrenzen liegen.
- Im Beispiel erhält man $\overline{x}_{korr} = 9.49$ und $\overline{s}^*_{korr} = 3.21$.
- Mittelwertkarte für den korrigierten Vorlauf



8.3.3 Weitere Arten von Kontrollkarten

- Behandelt wurde bisher ein Beispiel einer Kontrollkarte ohne Gedächtnis, bei der eine Entscheidung über einen Eingriff nur aufgrund des Befundes der aktuellen Stichprobe getroffen wird.
- Derartige Kontrollkarten wurden 1931 von W.A. SHEWHART (1891-1967) eingeführt, sie werden auch Shewhart- oder klassische Kontrollkarten genannt.
- Wichtige Arten der Kontrollkarten für die messende Prüfung (Variablenprüfung) zur Überwachung der **Fertigungslage** sind
  - die Mittelwertkarte ($\overline{x}-$Karte);
  - die Einzelwertkarte;
  - die Mediankarte ($\tilde{x}-$Karte);
  - die Urwertkarte (Extremwertkarte).
- Wichtige Arten zur Überwachung der **Fertigungsstreuung** sind
  - die Standardabweichungskarte ($s-$Karte);
  - die Spannweitenkarte ($R-$Karte).

Kombinierte Kontrollkarten und Kontrollkarten für die Attributprüfung

- Wichtige Arten von kombinierten oder zweispurigen Kontrollkarten zur Überwachung der Lage und der Streuung gleichzeitig sind
  - die $\overline{x}/s-$Karte;
  - die $\tilde{x}/R-$Karte.
- Bei den Kontrollkarten für die zählende Prüfung (Attributprüfung) unterscheidet man im Wesentlichen
  - die $p-$Karte (p ist der Ausschussprozentsatz im Posten);
  - die $x-$Karte (x ist die Anzahl der Fehler in der Stichprobe);
  - die $u-$Karte (u ist die Anzahl der Fehler je Erzeugniseinheit).
- Dabei kann gegebenfalls eine Erzeugniseinheit auch mehrere Fehler aufweisen, die z.B. durch unterschiedliche Merkmale definiert werden.

Kontrollkarten mit Gedächtnis

- Weiterhin gibt es Kontrollkarten mit Gedächtnis, bei denen eine Entscheidung über einen Eingriff auch aufgrund der Ergebnisse vergangener Stichproben getroffen wird.
- Diese verwenden mehr Informationen über den Prozessverlauf und können somit Störungen schneller aufdecken als klassische Kontrollkarten.
- Wichtige Formen solcher Kontrollkarten mit Gedächtnis sind
  - die MOSUM-Karte ("Moving Sum Chart"), eine Regelkarte für einen gleitenden Mittelwert (mit einer endlichen Anzahl identischer Gewichte);
  - die EWMA-Karte ("Exponentially Weighted Moving Average Sum Chart"), eine Regelkarte für einen gleitenden Mittelwert mit exponentiell abklingenden Gewichten;
  - die CUSUM-Karte ("Cumulative Sum Chart"), hier erfolgt eine Auswertung mit Hilfe der kumulierten Summen der Abweichungen aller zurückliegender Stichprobenmittelwerte vom Sollwert a.

Klausuren Statistik I und II für Betriebswirte

- Statistik I
  - Termin: Freitag, 14. Februar 2020, 8:00 - 10:00 Uhr .
  - Raum:
    - MIB-1113
- Statistik II
  - Termin: Donnerstag, 5. März 2020, 8:00 - 10:00 Uhr .
  - Raum:
    - Alte Mensa
- Es muss selbstständig gearbeitet werden. Als Hilfsmittel für die Prüfungen ist außer Notebook und Handy alles zugelassen.