Statistik II für Betriebswirte
Vorlesung 14

Dr. Andreas Wünsche

TU Bergakademie Freiberg
Institut für Stochastik

27. Januar 2020

8.2 Mehrstufige Stichprobenpläne

- Um die Anzahl der zu prüfenden Teile zu verringern, können mehrstufige Stichprobenpläne verwendet werden.
- Dabei werden (in Abhängigkeit der Ergebnisse der einzelnen Stichproben) mehrere Stichproben nacheinander gezogen.
- Für jede der möglichen Stichproben (außer der letzten) gibt es 3 Entscheidungsmöglichkeiten:
  - Annahme des Postens (und keine weitere Ziehung einer Stichprobe);
  - Ablehnung des Postens (und keine weitere Ziehung einer Stichprobe);
  - Ziehung einer weiteren Stichprobe (fällt bei der letzten weg).
- Diese Stichproben haben im Allgemeinen einen **kleineren Umfang** im Vergleich zu einstufigen Plänen, so dass sich auch insgesamt eine geringere Anzahl von zu prüfenden Teilen ergibt.
- Diese Stichprobenpläne sind im Allgemeinen komplizierter und können auch organisatorisch ungünstiger sein, deshalb nutzt man praktisch meistens nur zweistufige Stichprobenpläne.

8.2.1 Zweistufige (oder doppelte) Stichprobenpläne

- Zunächst: Stichprobe vom Umfang n_1 aus dem Los und Bestimmung der Anzahl x_1 der Ausschussstücke darin.
- Entscheidung mit Annahmezahl c_1 und Ablehnezahl $c_2 > c_1$:
  - falls $x_1 \leq c_1$ gilt, nimmt man den Posten an;
  - falls $x_1 > c_2$ gilt, lehnt man den Posten ab;
  - falls $c_1 < x_1 \leq c_2$ gilt, zieht man eine weitere Stichprobe, diesmal vom Umfang n_2 und bestimmt die Anzahl der Ausschussteile x_2 in dieser zweiten Stichprobe.
- Entscheidung mit Annahmezahl c_3:
  - falls $x_1 + x_2 \leq c_3$ gilt, nimmt man den Posten an;
  - falls jedoch $x_1 + x_2 > c_3$ gilt, lehnt man den Posten ab.
- Damit müssen für einen zweistufigen Stichprobenplan 5 Parameter durch ähnliche Überlegungen wie beim einstufigen Stichprobenplan bestimmt werden: die Stichprobenumfänge n_1, n_2 und die Annahme- bzw. Ablehnezahlen c_1, c_2, c_3.

OC-Funktion für den zweistufigen Stichprobenplan

- $X_1\,, X_2$: Anzahl der Ausschussteile in Stichprobe 1 bzw. 2 ;
  N : Anzahl der Teile im Posten;
  M : Anzahl der Ausschussteile im Posten (unbekannt), $p = \dfrac{M}{N}$;
  P_p : Wahrscheinlichkeit, falls p die tatsächliche Ausschussquote ist .
- Annahmewahrscheinlichkeit des Loses:

$$L(p) = P_p\left(\{X_1 \leq c_1\} \cup \left[\{c_1 < X_1 \leq c_2\} \cap \{X_1 + X_2 \leq c_3\}\right]\right)$$

$$= P_p(X_1 \leq c_1) + \sum_{x_1=c_1+1}^{c_2} P_p(X_1 + X_2 \leq c_3 | X_1 = x_1) P_p(X_1 = x_1)$$

$$= \sum_{x_1=0}^{c_1} P_p(X_1 = x_1)$$

$$+ \sum_{x_1=c_1+1}^{c_2} P_p(X_2 \leq c_3 - x_1 | X_1 = x_1) P_p(X_1 = x_1)\,.$$

Exakte Formel für die OC-Funktion

$$L(p) = \sum_{x_1=0}^{c_1} P_p(X_1 = x_1) + \sum_{x_1=c_1+1}^{c_2} \sum_{x_2=0}^{c_3-x_1} P_p(X_2 = x_2 | X_1 = x_1) P_p(X_1 = x_1)\,.$$

Da X_1 und X_2 (bedingt) hypergeometrisch verteilt sind, gilt somit

$$L(p) = \sum_{x_1=0}^{c_1} \frac{\binom{M}{x_1}\binom{N-M}{n_1-x_1}}{\binom{N}{n_1}} + \sum_{x_1=c_1+1}^{c_2} \sum_{x_2=0}^{c_3-x_1} \frac{\binom{M-x_1}{x_2}\binom{N-n_1-(M-x_1)}{n_2-x_2}\binom{M}{x_1}\binom{N-M}{n_1-x_1}}{\binom{N-n_1}{n_2}\binom{N}{n_1}}\,.$$

Näherungsformeln für die OC-Funktion

- **Binomialapproximation** $\left(p = \dfrac{M}{N}\right)$:

$$L(p) \approx \sum_{x_1=0}^{c_1} \binom{n_1}{x_1} p^{x_1} (1-p)^{n_1-x_1}$$

$$+ \sum_{x_1=c_1+1}^{c_2} \sum_{x_2=0}^{c_3-x_1} \binom{n_1}{x_1} \binom{n_2}{x_2} p^{x_1+x_2} (1-p)^{n_1+n_2-x_1-x_2} .$$

- **Poissonapproximation** $(\lambda_1 = n_1 p\,,\ \lambda_2 = n_2 p)$:

$$L(p) \approx \sum_{x_1=0}^{c_1} \frac{(n_1 p)^{x_1}}{x_1!} \mathrm{e}^{-n_1 p}$$

$$+ \sum_{x_1=c_1+1}^{c_2} \sum_{x_2=0}^{c_3-x_1} \frac{n_1^{x_1} \cdot n_2^{x_2}}{x_1! \cdot x_2!} p^{x_1+x_2} \mathrm{e}^{-(n_1+n_2)p} .$$

Bestimmung des Stichprobenplanes

- Durch Vorgabe von zwei Punkten der OC-Funktion sind die fünf Kenngrößen n_1, n_2, c_1, c_2, c_3 nicht eindeutig bestimmbar.
- Diese Freiheit kann genutzt werden, um z.B. relativ einfache Stichprobenpläne aufzustellen. Häufig werden genutzt:
  - $c_2 = c_3$,
  - $c_2 = 3c_1$ oder $c_2 = 5c_1$ und
  - $n_2 = n_1$ oder $n_2 = 2n_1$.
- Sinnvolle Bedingungen an die Kenngrößen sind weiterhin:
  - $0 \leq c_1 < c_2 \leq n_1$, damit tatsächlich eine Zweistufigkeit vorliegt;
  - $c_1 < c_3 < c_2 + n_2$, damit eine 2. Stichprobe nötig wird, falls keine Annahme- oder Ablehneentscheidung im 1. Schritt erfolgt;
  - $\dfrac{c_1}{n_1} < \dfrac{c_3}{n_1 + n_2}$, der für die Annahme erlaubte Höchstausschussanteil der 1. Stichprobe ist kleiner als der der Gesamtprobe;
  - $\dfrac{c_3 + 1}{n_1 + n_2} < \dfrac{c_2 + 1}{n_1}$, der Mindestausschussanteil zur Ablehnung ist in der 1. Stichprobe größer als der in der Gesamtprobe.

Stichprobenumfang für den zweistufigen Stichprobenplan

- Der Stichprobenumfang N_s ist jetzt zufällig:

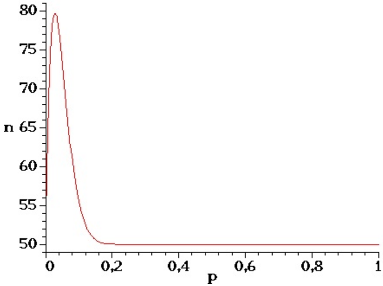
$$N_s = \begin{cases} n_1\,, & \text{falls } X_1 \le c_1 \text{ oder } X_1 \ge c_2 + 1\,; \\ n_1 + n_2\,, & \text{falls } c_1 < X_1 \le c_2\,. \end{cases}$$

- Zum Vergleich mit einstufigen Stichprobenplänen nutzt man den erwarteten Stichprobenumfang ("ASN", "average sample number", dieser hängt von der tatsächlichen Ausschussquote p ab)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_p N_s &= n_1 + n_2 P_p(c_1 < X_1 \le c_2) \\ &= n_1 + n_2 \sum_{x_1=c_1+1}^{c_2} \frac{\binom{M}{x_1}\binom{N-M}{n_1-x_1}}{\binom{N}{n_1}} \\ &\approx n_1 + n_2 \sum_{x_1=c_1+1}^{c_2} \binom{n_1}{x_1} p^{x_1} (1-p)^{n_1-x_1}\,, \end{aligned}$$

letztere Formel im Fall einer Binomialapproximation.

Vergleich mit einstufigen Stichprobenplänen



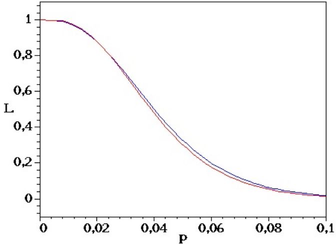
Beispiel 8.2:
Erwarteter Stichprobenumfang falls $n_1 = n_2 = 50\,,\ \ c_1 = 0\,, c_2 = c_3 = 2$ (Binomialapproximation)

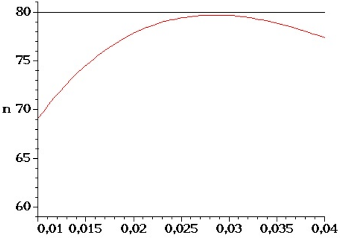
- Um festzustellen, ob sich die Zweistufigkeit gegenüber der Einstufigkeit lohnt, vergleicht man $\mathbf{E}_p N_s$ mit dem Stichprobenumfang n eines einstufigen Tests mit näherungsweise gleicher OC-Funktion.
- Als Kenngröße kann man dazu die sogenannte inverse Zweckdienlichkeit $\mathrm{eff} = \dfrac{\max_p \mathbf{E}_p N_s}{n}$ nutzen.

Beispiel 8.2 ($N \geq 1000 \;\Rightarrow\;$ Binomialapproximation)

- Zweistufiger Plan: $n_1 = n_2 = 50\,,\ c_1 = 0, c_2 = c_3 = 2$ (rot);
  Einstufiger Plan: $n = 94\,,\ c = 3$ (blau).

  OC-Funktionen — Erwarteter Stichprobenumfang

- 



- Der Maximalwert von $\mathbf{E}_p N_s$ liegt bei ≈ 80
  (für $p = 0.0283$ ist $\mathbf{E}_p N_s = 79.696$)
  $\Rightarrow \quad \text{eff} \approx \dfrac{80}{94} = 0.851$ ($\approx 85\%$ des einstufigen Aufwandes).

8.2.2 Sequentielle Stichprobenpläne

- Sequentielle Stichprobenpläne kann man als Verallgemeinerung von mehrfachen Stichprobenplänen ansehen. Bei ihnen wird jeweils **ein Element** aus dem Posten zufällig ausgewählt und geprüft und dann auf Basis der bislang vorliegenden Information entschieden, ob
  - der Posten angenommen wird, oder
  - der Posten abgelehnt wird, oder
  - ein weiteres Element gezogen und geprüft wird.
- Die mathematische Modellierung dieser Situation erfordert weiterführende Begriffe und die Berechnungen werden schwieriger.
- Im Folgenden bezeichnen
  - k die Anzahl der schon geprüften Stücke,
  - X_k die zufällige Anzahl der Ausschussstücke unter den ersten k geprüften.

Der sequentielle (Likelihood-Quotienten-)Test

- Gute Eigenschaften hat der folgende sequentielle (Likelihood-Quotienten-)Test:
  - $X_k \leq c_s \cdot k - a$ Annahme des Postens,
  - $X_k \geq c_s \cdot k + b$ Ablehnung des Postens,
  - $c_s \cdot k - a < X_k < c_s \cdot k + b$ Fortsetzung der Prüfung.

  Dabei sind (als Funktionen von k) $c_s \cdot k - a$ die Annahmegerade und $c_s \cdot k + b$ die Ablehnungsgerade.

- Die Forderungen $L(p_\alpha) \approx 1 - \alpha$ und $L(p_\beta) \approx \beta$ werden näherungsweise erfüllt durch (bei Binomialapproximation):

$$a = \frac{\ln\left(\frac{1-\alpha}{\beta}\right)}{d}, \quad b = \frac{\ln\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)}{d}, \quad c_s = \frac{\ln\left(\frac{1-p_\alpha}{1-p_\beta}\right)}{d}$$

$$\text{mit} \qquad d = \ln\left(\frac{p_\beta(1-p_\alpha)}{p_\alpha(1-p_\beta)}\right).$$

Beispiel 8.3

- Sequentieller Stichprobenplan mit:

  Annahmegrenze $p_\alpha = 0.02$ mit Produzentenrisiko $\alpha = 0.1$,

  Ablehngrenze $p_\beta = 0.05$ mit Konsumentenrisiko $\beta = 0.1$.

- $d = \ln\left(\dfrac{0.05 \cdot 0.98}{0.02 \cdot 0.95}\right) = 0.9474\,, \quad a = b = \dfrac{\ln\left(\frac{0.9}{0.1}\right)}{d} = 2.319\,,$

  $c_s = \dfrac{\ln\left(\frac{0.98}{0.95}\right)}{d} = 0.03282\,.$

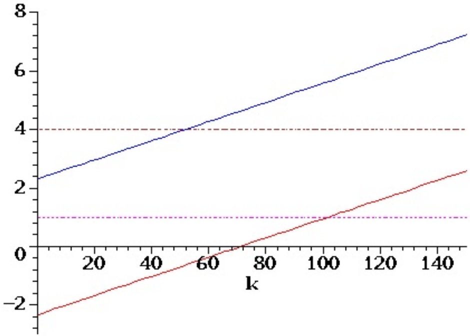
- Prüfverfahren:

  k Anzahl der bisher geprüften Stücke,

  x_k Anzahl der bisher gefundenen Ausschussstücke.

  - $x_k \le c_s k - a = 0.03282 \cdot k - 2.319\,,$ Annahme des Postens;
  - $x_k \ge c_s k + b = 0.03282 \cdot k + 2.319\,,$ Ablehnung des Postens;
  - $c_s k - a = 0.03282k - 2.319 < x_k < 0.03282k + 2.319 = c_s k + b\,,$ Fortsetzung der Prüfung.

Grafik zum Beispiel 8.3



- Wenn z.B. bei $k \leq 51$ bereits $x_k = 4$, dann Ablehnung des Postens.
- Wenn z.B. bei $k \geq 102$ immer noch $x_k = 1$, dann Annahme des Postens.

Erwarteter Stichprobenumfang

- Der Stichprobenumfang N_s ist auch in diesem Fall eine Zufallsgröße.
- Für den erwarteten (oder durchschnittlichen Stichprobenumfang ASN) ergibt sich ungefähr

$$\mathbf{E}_p N_s = \begin{cases} \frac{b-(a+b)L(p)}{p-c_s}\,, & \text{für } p \neq c_s\,; \\ \frac{ab}{c_s(1-c_s)}\,, & \text{für } p = c_s\,. \end{cases}$$

  ($L(p)$ ist der Wert der OC-Funktion für diesen Stichprobenplan, falls der tatsächliche Ausschussanteil des Postens p ist.)
- Im Allgemeinen ist der erwartete Stichprobenumfang eines sequentiellen Stichprobenplanes wesentlich kleiner als der eines vergleichbaren einfachen Stichprobenplanes.
- Die konkreten Stichprobenumfänge können aber bei sequentiellen Stichprobenplänen starken Schwankungen unterliegen, wodurch sich z.B. organisatorische Probleme ergeben können.

Erwarteter Stichprobenumfang im Beispiel 8.3

$$\mathbf{E}_p N_s \approx \begin{cases} \frac{b-(a+b)\cdot 1}{0-c_s} = \frac{a}{c_s} & \approx \quad 70.7\,, \quad \text{für } p = 0\,; \\ \frac{b-(a+b)\cdot(1-\alpha)}{p_\alpha - c_s} & \approx \quad 144.8\,, \quad \text{für } p = p_\alpha = 0.02\,; \\ \frac{ab}{c_s(1-c_s)} & \approx \quad 169.5\,, \quad \text{für } p = c_s = 0.03282\,; \\ \frac{b-(a+b)\cdot\beta}{p_\beta - c_s} & \approx \quad 108.0\,, \quad \text{für } p = p_\beta = 0.05\,; \\ \frac{b-(a+b)\cdot 0}{1-c_s} = \frac{b}{1-c_s} & \approx \quad 2.4\,, \quad \text{für } p = 1\,. \end{cases}$$

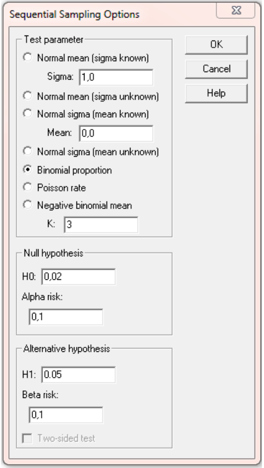
- Im Vergleich dazu hat ein einfacher Stichprobenplan mit etwa den gleichen Güteeigenschaften einen vom Ausschussanteil p unabhängigen Stichprobenumfang $n = 232$ (für $N = 10000$) bei einer Annahmezahl von $c = 7$ (berechnet mit Statgraphics, also der hypergeometrischen Verteilung).

Beispiel 8.3 mit Statgraphics

Describe → Numeric Data → Sequential Sampling

Beschreiben → Numerische Daten → Sequentielle Tests

Als nächstes muss ein Datensatz (Data Datenvariable) ausgewählt werden. Dann stehen verschiedene sequentielle Tests zu Auswahl.



Analysis Summary im Beispiel 8.3 mit Statgraphics

Sequential Sampling

Data variable: X

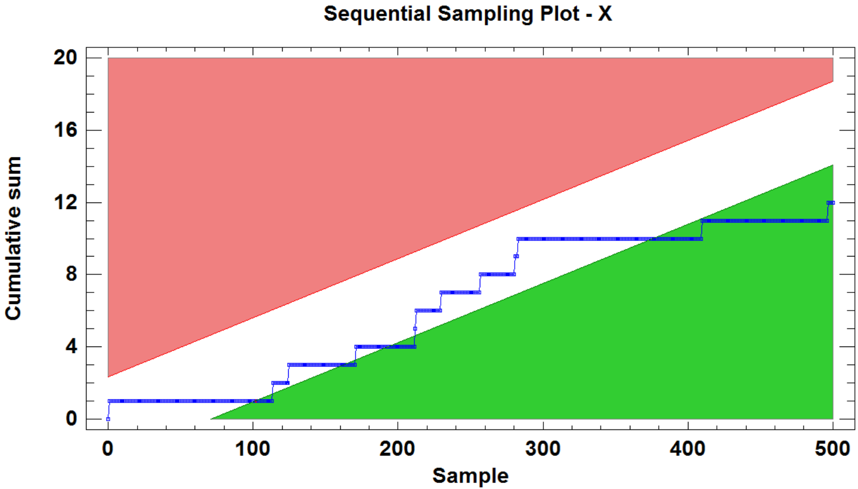
Count	500
Average	0,024
Median	0,0
Standard deviation	0,153202
Minimum	0,0
Maximum	1,0
Stnd. skewness	56,9537
Stnd. kurtosis	169,214

Hypothesis Test

Null hypothesis	p = 0,02	alpha risk = 0,1
Alternative hypothesis	p = 0,05	beta risk = 0,1

Decision: accept null hypothesis at sample 102

Seqentieller Test mit Statgraphics



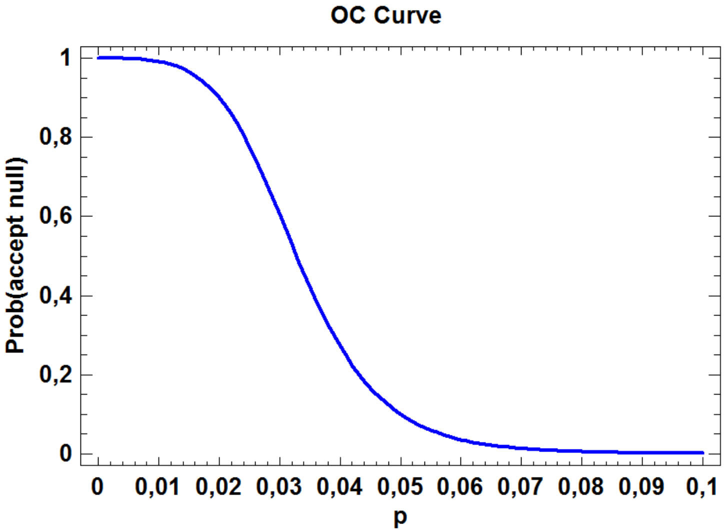
Werte der OC- und ASN-Funktion mit Statgraphics

Test Performance

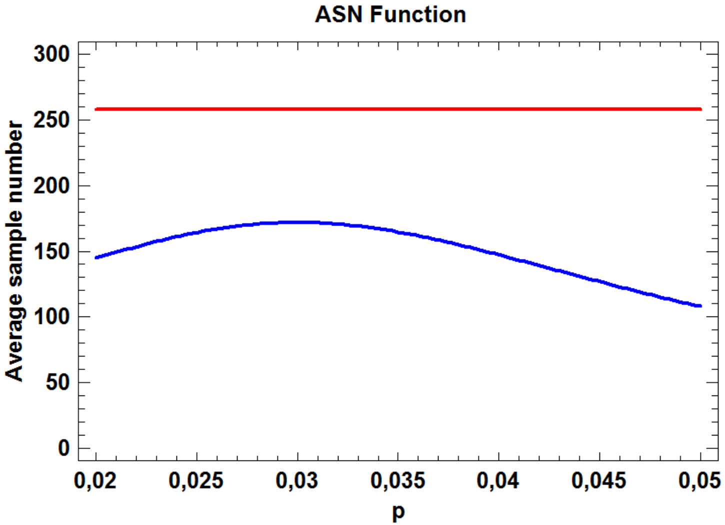
	p	*Prob(accept null)*	*Average sample number*
Null hyp.	0,02	0,9000	144,76
	0,023	0,8333	157,47
	0,026	0,7454	166,95
	0,029	0,6412	171,57
	0,032	0,5301	170,64
	0,035	0,4225	164,66
	0,038	0,3268	154,99
	0,041	0,2472	143,30
	0,044	0,1842	131,00
	0,047	0,1360	119,05
Alt. hyp.	0,05	0,1000	107,98

Sample size for fixed test n = 258

OC-Funktion im Beispiel 8.3 mit Statgraphics



ASN-Funktion im Beispiel 8.3 mit Statgraphics



Weitere Bemerkungen zu Stichprobenplänen

- Bei den einstufigen Verfahren lässt sich der Prüfaufwand gegebenenfalls etwas reduzieren, wenn die Kontrolle abgebrochen wird, sobald die Anzahl der schlechten Stücke die Annahmezahl überschreitet.
- Entsprechend lässt sich auch bei zwei- oder mehrstufigen Verfahren gegebenenfalls etwas Prüfarbeit einsparen.
- Sequentielle Verfahren werden inzwischen auch in vielen anderen Gebieten der Technik, Medizin, Naturwissenschaften usw. angewendet, wo es darauf ankommt, den durchschnittlichen Stichprobenumfang möglichst gering zu halten und Wahrscheinlichkeiten für Fehler erster und zweiter Art unter Kontrolle zu halten.

Stichprobenpläne für quantitative Merkmale

- Bisher wurden attributive Stichprobenpläne behandelt, bei denen nur festgestellt wird, ob die überprüften Stücke brauchbar oder unbrauchbar sind.
- Trifft man die Entscheidung „gut“ oder „schlecht“ aber aufgrund eines quantitativen Merkmals, wie Länge, Gewicht, Lebensdauer etc., dann lassen sich auch Stichprobenpläne für quantitative Merkmale (Stichprobenpläne für die Variablenprüfung) verwenden.
- Diese nutzen Informationen über den Verteilungstyp des Merkmals aus und können dadurch mit wesentlich geringeren Stichprobenumfängen auskommen. Allerdings kann der Prüfaufwand für die einzelne Messung größer sein.
- Konkrete Beispiele für derartige Prüfpläne findet man in der Fachliteratur.