Aufgabe 3

$$X \quad - \quad \text{zufällige Anzahl der Tore pro Spiel}$$

Im Folgenden wird ein χ^2**-Anpassungstest** durchgeführt, wobei die theoretische Verteilung, also die Verteilung von X_0, eine **Poissonverteilung** ist.

$$X_0 \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$$

Hierbei ist zu beachten, dass die Poissonverteilung eine diskrete Verteilung ist, also nur natürliche Zahlen mit positiver Wahrscheinlichkeit annimmt. Demzufolge wählen wir für den χ^2-Anpassungstest $\mathbf{k = 9}$ Klassen wie folgt:

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$	$\{7\}$	$\{8, 9, 10, ...\}$

1. Die **Hypothesen** lauten

$$H_0 : F_X(t) = F_{X_0}(t) \quad \text{v.s.} \quad H_A : F_X(t) \neq F_{X_0}(t).$$

2. Es wird getestet zum **Signifikanzniveau** $\alpha = 0,05$.

3. Die **Teststatistik** lautet

$$T = \sum_{i=1}^{k} \frac{(H_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i}. \tag{0–1}$$

4. Der **kritische Bereich** lautet

$$K = \left\{ t \,|\, t \geq \chi^2_{k-m-1;1-\alpha} \right\}.$$

Der Parameter λ muss aus den Daten geschätzt werden. Damit gilt $\mathbf{m = 1}$ und man erhält mit Hilfe der Tabelle für die Quantile der χ^2-Verteilung

$$\chi^2_{k-m-1;1-\alpha} = \chi^2_{9-1-1;1-0,05} = \chi^2_{7;0,95} = 14,07$$

.

5. Zur **Berechnung der Teststatistik** wird im folgenden die gegebene Tabelle aus Statgraphics komplettiert:

Für die Berechnung der **Expected Frequency** $n \cdot p_i$ benötigt man die Werte p_i. Dazu benötigt man eine Schätzung des Parameter λ der Poissonverteilung . Für den Erwartungswert der Poissonverteilung gilt $\mathbf{E}[X_0] = \lambda$. Damit schätzt man λ durch den Schätzer für den Erwartungswert:

$$\hat{\lambda} = \overline{x} = \frac{1}{306}(24 \cdot 0 + 45 \cdot 1 + ... + 2 \cdot 8) = 2,83$$

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion des Poissonverteilung lautet

$$f_{X_0}(n) = \mathrm{P}(X_0 = n) = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$$

Damit ergibt sich unter Anwendung des geschätzten Parameters $\hat{\lambda}$

$$p_4 = \mathrm{P}(X_0 = 3) = \frac{\hat{\lambda}^3}{3!}e^{-\hat{\lambda}} = \frac{2,83^3}{3!}e^{-2,83} = 0,223$$

und

$$p_8 = \mathrm{P}(X_0 = 7) = \frac{\hat{\lambda}^7}{7!}e^{-\hat{\lambda}} = \frac{2,83^7}{7!}e^{-2,83} = 0,017$$

Für die *Expected Frequencies* ergibt sich

$$n \cdot p_4 = 306 \cdot 0,223 = 68,24 \qquad n \cdot p_8 = 306 \cdot 0,017 = 5,2$$

Für die gesuchten Werte **Chi-Square** folgt damit

$$\frac{(H_4 - n \cdot p_4)^2}{n \cdot p_4} = \frac{(67 - 68,24)^2}{68,24} = 0,02 \qquad \frac{(H_8 - n \cdot p_8)^2}{n \cdot p_8} = \frac{(1 - 5,2)^2}{5,2} = 3,39$$

Für die Teststatistik ergibt sich durch aufsummieren der Chi-Square-Spalte:

$$t = 1,96 + 0,73 + 0,55 + 0,02 + 1,96 + 0,2 + 2,03 + 3,39 + 0,16 = 11$$

6. Damit gilt $t = 11 < 14,07$, woraus folgt

$$t \notin K \Longrightarrow H_0 \text{ wird angenommen.}$$

D.h. die **Verteilung** der Anzahl der Tore pro Spiele unterscheidet sich **nicht signifikant** von einer **Poissonverteilung**.