7. Lösung weitere Übungsaufgaben Statistik I SoSe 2019

1. **Aufgabe:** Für ein neues Mineralwasser ist hinsichtlich des Magnesiumsgehalts das Folgende bekannt. Der Magnesiumgehalt ist normalverteilt mit Erwartungswert 80 $\frac{mg}{l}$ und Standardabweichung $\sigma = 0,4\ \frac{mg}{l}$.

   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Magnesiumgehalt größer als 81 $\frac{mg}{l}$ ist ?

   b) In welchen Grenzen symmetrisch zum Erwartungswert liegt der Magnesiumgehalt mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% ?

   Lösung:

   X - zufälliger Magnesiumgehalt

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) = \mathcal{N}(80, 0,4^2).$$

   a)

$$\begin{aligned} P(X > 81) &= 1 - \Phi\left(\frac{81-80}{0,4}\right) \\ &= 1 - \Phi(2,5) \\ &= 1 - 0,9938 \\ &= \underline{0,0062} \end{aligned}$$

   Die Wahrscheinlichkeit, dass der Magnesiumgehalt größer als 81 $\frac{mg}{l}$ ist beträgt 0,0062 (0,62%).

   b)

$$\begin{aligned} P(\mu - k \leq X \leq \mu + k) = 2\Phi\left(\frac{k}{\sigma}\right) - 1 &\stackrel{!}{=} 0,9. \\ \Longrightarrow \qquad \Phi\left(\frac{k}{0,4}\right) &= 0,95 \qquad |\Phi^{-1} \\ \frac{k}{0,4} &= z_{0,95} = 1,6449 \\ k &= 0,65796 \approx 0,658 \\ \Longrightarrow \qquad P(79,342 \leq X \leq 80,658) &= 0,9 \end{aligned}$$

   Der Magnesiumgehalt liegt zwischen 79,342 $\frac{mg}{l}$ und 80,658 $\frac{mg}{l}$ mit einer Wahrscheinlichkeit von 90%.

2. Aufgabe: In einem Betrieb werden zylinderförmige Aluminiumbolzen hergestellt, deren Durchmesser (in mm) durch eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert $\mu = 20\,mm$ und Varianz $\sigma^2 = 0.64\,mm^2$ beschrieben werden können.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Durchmesser eines Aluminiumbolzens zwischen $19\,mm$ und $21\,mm$ liegt?

b) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Durchmesser eines Aluminiumbolzens kleiner als $19\,mm$ ist, soll 0,05 betragen. Wie groß muss beim Erwartungswert von $20\,mm$ die Standardabweichung sein, damit diese Forderung eingehalten wird?

<u>Lösung:</u>

X - zufällige Bolzendurchmesser

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) = \mathcal{N}(20, 0,64).$$

a)

$$\begin{aligned}
P(19 < X < 21) &= \Phi\left(\frac{21-20}{\sqrt{0,64}}\right) - \Phi\left(\frac{19-20}{\sqrt{0,64}}\right) \\
&= \Phi(1,25) - \Phi(-1,25) \\
&= \Phi(1,25) - (1 - \Phi(1,25)) \\
&= 2 \cdot \Phi(1,25) - 1 \\
&= 2 \cdot 0,8944 - 1 = \underline{0,7888}
\end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Durchmesser eines Aluminiumbolzens zwischen $19\,mm$ und $21\,mm$ liegt beträgt 0,7888 (78,88%).

b)

$$\begin{aligned}
P(X < 19) &\overset{!}{=} 0,05 \\
\Phi\left(\frac{19-20}{\sigma}\right) &= 0,05 \qquad |\Phi^{-1} \\
\frac{19-20}{\sigma} &= z_{0,05} = -z_{0,95} = -1,6449 \\
\Longrightarrow \qquad \sigma &= \frac{-1}{-1,6449} \approx \underline{0,6079}
\end{aligned}$$

Die Standardabweichung muss ca. $0,61\,mm$ betragen, damit die Forderung erfüllt ist.

3. Aufgabe: Eine sächsische Molkerei füllt Milch in 500 ml Tetrapacks ab. Die Füllmenge ist normalverteilt mit Erwartungswert 502 ml und Standardabweichung 2 ml.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Tetrapack zwischen 500 ml und 503 ml enthalten sind?

b) Wie groß muß bei einer Standardabweichung von 2 ml der Erwartungswert mindestens sein, damit die Füllmenge von 500 ml höchstens mit einer Wahrscheinlichkeit von 1% unterschritten wird?

<u>Lösung:</u>
X - zufällige Füllmenge eines Tetrapacks

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad \text{mit} \quad \mu = 502\,ml \quad \text{und} \quad \sigma = 2\,ml.$$

a)

$$\begin{aligned} P(500 \leq X \leq 503) &= \Phi\left(\frac{503-502}{2}\right) - \Phi\left(\frac{500-502}{2}\right) \\ &= \Phi(0,5) - \Phi(-1) = \Phi(0,5) - (1 - \Phi(1)) \\ &= \Phi(0,5) + \Phi(1) - 1 \\ &= 0,6915 + 0,8413 - 1 = \underline{0,5328} \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Tetrapack zwischen 500 ml und 503 ml enthalten sind beträgt 0,5328 (53,28%).

b)

$$\sigma = 2\,ml$$

$$\begin{aligned} P(X < 500) &\leq 0,01 \\ \Phi\left(\frac{500-\mu}{2}\right) &\leq 0,01 \qquad |\Phi^{-1} \\ \frac{500-\mu}{2} &\leq z_{0,01} = -z_{0,99} = -2,3263 \\ \Longrightarrow \quad 500 + 2 \cdot 2,3263 &\leq \mu \\ \underline{504,65\ ml \leq \mu} \end{aligned}$$

Der Erwartungswert muss mindestens 504,65 ml betragen.

4. Aufgabe: Die Dauer eines typischen Lötvorgangs an Feinblechen ist normalverteilt mit einem Erwartungswert von 90 Sekunden und einer Standardabweichung von 16 Sekunden.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Lötvorgang zwischen 40 und 80 Sekunden dauert?

b) Wie viel Zeit müssen Sie für einen Lötvorgang einplanen, wenn Sie die eingeplante Zeit nur mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 10 % überziehen möchten?

Lösung:
X - zufällige Dauer eines Lötvorganges,
$X \sim \mathcal{N}(90\, s, (16\, s)^2)$.

a)

$$\begin{aligned} P(40 < X < 80) &= \Phi\left(\frac{80-90}{16}\right) - \Phi\left(\frac{40-90}{16}\right) \\ &= \Phi(-0,625) - \Phi(-3,125) \\ &= 1 - \Phi(0,625) - 1 + \Phi(3,125) \\ &= 0,9991 - 0,734 = \underline{0,2651} \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Lötvorgang zwischen 40 und 80 Sekunden dauert beträgt 0,2651 (26,51%)?

b)

$$\begin{aligned} & P(X > a) &\leq\ & 0,1 \\ \Longrightarrow\ & P(X \leq a) &>\ & 0,9 \\ \Longrightarrow\ & \Phi\left(\frac{a-90}{16}\right) &>\ & 0,9 \qquad |\Phi^{-1} \\ & \frac{a-90}{16} &>\ & z_{0,9} = 1,2816 \\ \Longrightarrow\ & a &>\ & 110,5056 \end{aligned}$$

Für einen Lötvorgang sollte man ca. 110,5 Sekunden einplanen. Nur 10% der Lötvorgänge benötigen mehr als 110,5 Sekunden.