6. Lösung weitere Übungsaufgaben Statistik I SoSe 2019

1. **Aufgabe:** Welche der folgenden Verteilungen würde man zur Modellierung welcher Zufallsvariable verwenden: (Mehrfachnennungen sind möglich!) Bitte geben Sie, falls möglich, jeweils die Parameter der Verteilungen mit an.

a: Binomialverteilung
b: diskrete Gleichverteilung
c: hypergeometrische Verteilung
d: geometrische Verteilung
e: negative Binomialverteilung
f: Poissonverteilung

☐ Eine Lieferung von 27 Stiften enthält 2 Stifte, die defekt sind. Der Empfänger testet zur Kontrolle 3 Stifte und behält die Lieferung, falls alle 3 funktionieren, ansonsten sendet er die Lieferung zurück. Sei X die zufällige Anzahl der defekten Stifte unter den 3 geprüften. Wie ist X verteilt?

☐ Sie führen Experimente durch, welche unabhängig voneinander zu 60% gelingen. Sie benötige ein gelungenes Experiment. Wie ist die zufällige Anzahl X der Experimente bis zum ersten gelungenen Experiment verteilt?

☐ Eine Werkstatt hat eine Anlage, die Ersatzteile für ein gewisses Auto produziert. Unabhängig von den anderen Teilen ist jedes produzierte Ersatzteil mit Wahrscheinlichkeit $p = 0,15$ Ausschuss. Es werden 30 Ersatzteile produziert. Wie ist die zufällige Anzahl X der produzierten Ausschussteile unter den 30 produzierten Teilen verteilt?

☐ Der Automat produziert 300 Schrauben pro Minute bei einer Ausschussquote weit unter einem Prozent. Wie ist die Verteilung der Anzahl der defekten Schrauben, die in einer halben Stunde produziert werden?

☐ Aus einer laufenden Produktion werden Kleinteile entnommen und geprüft, ob sie normgerecht sind. Wie ist die zufällige Anzahl der geprüften Teile verteilt bis man 5 normgerechte Teile hat?

☐ Von 70 Teilnehmern einer Klausur sind nur 30 regelmäßig in die Vorlesungen und Übungen gegangen. Bei 10 zufällig herausgegriffenen Klausuren beeindruckt die Bandbreite der Klausurergebnisse. Wie groß ist die Chance, Klausuren von mindestens 4 pflichtbewußten Studenten herausgegriffen zu haben?

☐ Bei den 10 in Induktionsöfen zur Frequenzsteuerung eingesetzten Kondensatoren ist zuvor eine Prüfung ihrer Sicherheit gegen Spannungsspitzen vorzunehmen. Nur Kondensatoren, die diese Prüfung bestehen, dürfen eingebaut werden. Wie ist die Anzahl der Kondensatoren, die überprüft werden müssen, um die 10 notwendigen bereit zu haben, verteilt?

- [ ] Eine Sortieranlage für Pfandflaschen sondert automatisch falsche Flaschen mit großer Sicherheit aus. Wobei nach diesen Sortiervorgang immer noch 0,3% falsche Flaschen vorkommen. Wie ist die Anzahl verbliebener falscher Flaschen bezüglich eines 20-iger Kastens verteilt, die per Hand nachsortiert werden müssten?
- [ ] Die obige Anlage sortiert ca. 1000 Flaschen pro Minute. Welche Verteilung wählen Sie für die Anzahl falscher, verbliebener Flaschen pro Minute?
- [ ] Sie sollen zufällig unter 20 Personen jemand ohne Bevorzugung auswählen. Welche Verteilung der Auswahl würden Sie verwenden?
- [ ] Eine Familie bucht ihren Jahresurlaub in einem Hotel. Im Hotel sind zur gewünschten Zeit noch 12 Zimmer frei. 7 dieser 12 Zimmer besitzen einen direkten Meerblick. Die Familie bucht 3 der 12 Zimmer rein zufällig. Wieviele Zimmer mit Mehrblick wird die Familie wohl gebucht haben?
- [ ] Ein Junge versucht mit einem Tennisball eine Dose von einem Zaunpfahl zu werfen. Mit wie vielen Versuchen schafft er dies?
- [ ] An einem neuen Werkstoff wird ein Belastungstest durchgeführt. Bei einer festgelegten starken Krafteinwirkung bricht der Werkstoff oder er bricht nicht. Es ist bekannt, dass ein Bruch mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,04 erfolgt. Es werden unabhängig voneinander 7 Versuche durchgeführt. Bei wievielen Versuchen bricht der neue Werkstoff?

<u>Lösung:</u>
Stifte: hypergeometrische Verteilung (c), $X \sim \mathbf{Hyp}(27, 2, 3)$
Experimente: geometrische Verteilung (d), $X \sim \mathbf{Geo}(0,6)$
Werkstatt: Binomialverteilung (a), $X \sim \mathbf{Bin}(30; 0,15)$

Schrauben:
X - zufällige Anzahl der defekten Schrauben, die in einer halben Stunde produziert werden.
(näherungsweise) Poissonverteilung (f), $X \sim \mathbf{Poi}(9000 \cdot p)$

Kleinteile:
X - die zufällige Anzahl der geprüften Teile verteilt bis man 5 normgerechte Teile hat.
negative Binomialverteilung (e), $X \sim \mathbf{NegBin}(5, p)$

Klausuren:
X - zufällige Anzahl der pflichtbewußten Studenten unter der 10 herausgegriffenen
hypergeometrische Verteilung (c), $X \sim \mathbf{Hyp}(70, 30, 10)$

Öfen: negative Binomialverteilung (e) $X \sim \mathbf{NegBin}(10, p)$
Sortiermaschine: Binomialverteilung (a) $X \sim \mathbf{Bin}(20; 0,003)$

Sortiermaschine: (näherungsweise) Poissonverteilung (f), $X \sim \mathbf{Poi}(1000 \cdot 0,003)$
Auswahl: diskrete Gleichverteilung (b), $X \sim \mathbf{U}(\{1, 2, ..., 20\})$

Hotel:
X - zufällige Anzahl der Zimmer mit direkten Meerblick unter den 3 zufällig gebuchten. hypergeometrische Verteilung (c), $X \sim \mathbf{Hyp}(12, 7, 3)$

Dose:
X - zufällige Anzahl der Würfe bis die Dose getroffen wird. geometrische Verteilung (d), $X \sim \mathbf{Geo}(p)$

Werkstoff:
X - zufällige Anzahl der Versuche bei denen das Werkstück bricht.
Binomialverteilung (a), $X \sim \mathbf{Bin}(7; 0, 04)$

2. **Aufgabe:** Ein Geschäft hat von einer bestimmten Sorte Batterien noch 13 Stück in einem Warenträger liegen. Davon sind aber 4 überlagert, also unbrauchbar. Ein Käufer kauft 6 Batterien.

   a) Wie die zufällige Anzahl X der unbrauchbaren Batterien unter den 6 gekauften verteilt?
   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält der Käufer zwei oder drei unbrauchbare Batterien?
   c) Eine brauchbare Batterie hat einen Wert von 2 €. Eine unbrauchbare hingegen ist -0,5 € Wert (Entsorgungskosten). Wie groß ist der erwartete Wert der 6 gekauften Batterien?

<u>Lösung:</u>
X - zufällige Anzahl der unbrauchbaren Batterien unter den 6 gekauften.

a) X ist hypergeometrisch ($X \sim \mathbf{Hyp}(N, M, n)$) mit $N = 13$, $M = 4$ und $n = 6$.
b)

$$\begin{aligned} P(X=2) + P(X=3) &= \frac{\binom{4}{2}\binom{9}{4}}{\binom{13}{6}} + \frac{\binom{4}{3}\binom{9}{3}}{\binom{13}{6}} \\ &= \frac{63}{143} + \frac{28}{143} = 0,\overline{63} \approx \underline{0,64} \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 0,64 (64%) befinden sich unter den 6 gekauften Batterien 2 oder 3 unbrauchbare.

c) W - zufälliger Wert der 6 gekauften Batterien

$2 \text{ €} \cdot (6 - X) =$ Wert der brauchbaren Batterien.
$-0,5 \text{ €} \cdot X =$ Wert der unbrauchbaren Batterien.

$$\begin{aligned} W &= 2 \text{ €} \cdot (6 - X) - 0,5 \text{ €} \cdot X \\ &= 12 \text{ €} - 2,5 \text{ €} \cdot X \\ \mathbf{E}W &= 12 \text{ €} - 2,5 \text{ €} \cdot \mathbf{E}X \\ &= 12 \text{ €} - 2,5 \text{ €} \cdot \frac{24}{13} \\ &\approx \underline{7,38 \text{ €}} \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\mathbf{E}X = n \cdot \frac{M}{N} = 6 \cdot \frac{4}{13} = \frac{24}{13}.$$

Der erwartete Wert der 6 gekauften Batterien ist ca. 7,38 €.

3. Aufgabe: Die Anzeige des Betriebszustandes einer automatischen Produktionsanlage erfolgt mit 10 Bauelementen vom gleichen Typ. Jedes dieser Bauelemente kann mit Wahrscheinlichkeit 0,15 unabhängig von anderen Bauteilen ausfallen. Sind in der Anzeige mehr als zwei Elemente ausgefallen, dann ist der aktuelle Betriebszustand nicht mehr eindeutig ablesbar. Berechnen Sie deshalb die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nicht mehr als zwei Bauelemente ausgefallen sind.

Lösung:

A - Bauteil fällt aus mit $P(A) = p = 0,15$ und
A^c - Bauteil fällt nicht aus mit $P(A^c) = 1 - p = 0,85$

$n = 10$ unabhängige Bauteile

X - zufällige Anzahl der ausgefallenen Bauteile
X ist binomialverteilt ($X \sim \mathbf{Bin}(n, p)$) mit den Parametern $n = 10$ und $p = 0,15$.

$$\begin{aligned} P(X \le 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= \binom{10}{0} 0,15^0 \cdot 0,85^{10} + \binom{10}{1} 0,15^1 \cdot 0,85^9 + \binom{10}{2} 0,15^2 \cdot 0,85^8 \\ &\approx \underline{0,82} \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von rund 0,82 (82%) fallen höchtens zwei Bauelemente aus.