5. Lösung weitere Übungsaufgaben Statistik I SoSe 2019

1. Aufgabe: In einem PC-Pool stehen 25 Computer, die während eines Schulungsseminars genutzt werden sollen. Es ist davon auszugehen, dass jeder dieser Rechner unabhängig von den anderen Rechnern mit einer Wahrscheinlichkeit von 3% nicht funktioniert.

a) Wie ist die zufällige Anzahl X der Rechner, die nicht funktionieren, verteilt? (Parameter mit angeben!)

b) Wie wahrscheinlich ist es, dass höchstens ein Rechner nicht funktioniert?

c) Die Teilnahmegebühr beträgt pro Teilnehmer 150 € und wurde von allen 25 Teilnehmer schon bezahlt. Alle Teilnehmer erscheinen zum Seminar. Erhält ein Teilnehmer einen PC, welcher nicht funktioniert, so kann er dem Schulungsseminar nur noch passiv folgen. In diesem Fall erhält der Teilnehmer 100 € von seiner Teilnahmegebühr zurück.

Wie groß ist die erwartete Summe der Teilnahmegebühren, welche nach Abzug der Rückerstattungen übrig bleibt?

Lösung:

X - zufällige Anzahl der Rechner die nicht funktionieren unter den 25 Rechnern.

a) X ist binomialverteilt ($X \sim \mathbf{Bin}(n, p)$) mit $n = 25$ und $p = 0,03$.

b)

$$\begin{aligned} P(X \leq 1) &= P(X = 0) + P(X = 1) \\ &= \binom{25}{0} \cdot 0,03^0 \cdot 0,97^{25} + \binom{25}{1} \cdot 0,03^1 \cdot 0,97^{24} \\ &\approx \underline{0,828} \end{aligned}$$

c) G - zufällige Summe der Tagungsgebühren.

150 € $\cdot (25 - X)$ = Gebühr falls Rechner funktioniert.
50 € $\cdot X$ = Gebühr falls Rechner nicht funktioniert.

$$\begin{aligned} G &= 150 € \cdot (25 - X) + 50 € \cdot X \\ &= 3750 € - 100 € \cdot X \\ \mathbf{E}G &= 3750 € - 100 € \cdot \mathbf{E}X \\ &= 3750 € - 100 € \cdot 0,75 \\ &= \underline{3675 €} \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\mathbf{E}X = n \cdot p = 25 \cdot 0,03 = 0.75.$$

2. Aufgabe: Ein bekannter Hersteller von Keksen verspricht seinen Kunden eine Extraüberraschung in jeder fünften Keksschachtel. Im Supermarktregal befinden sich noch 15 Keksschachteln. Davon sind genau vier mit Extraüberraschung. Voller Freude kauft ein übereifriger Vater in diesem Supermarkt gleich sieben Schachteln.

a) Wie ist die zufällige Anzahl X der Keksschachteln mit Extraüberraschung unter den sieben gekauften verteilt?

b) Wie wahrscheinlich ist es, dass unter den sieben gekauften Schachteln genau zwei mit Extraüberraschung sind?

c) Eine Keksschachtel ohne Extraüberraschung hat einen Wert von 8,60 €. Die Extraüberraschung ist immer im Wert von 12 €, d.h. der Wert einer Keksschachtel mit Extraüberraschung ist 20,60 €. Wie groß ist der erwartete Wert der sieben vom Vater gekauften Schachteln?

Lösung:

X - zufällige Anzahl der Keksschachteln mit Extraüberraschung unter der sieben gekauften

a) X ist hypergeometrisch ($X \sim \mathbf{Hyp}(N, M, n)$) mit $N = 15$, $M = 4$ und $n = 7$.

b)

$$P(X = 2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{11}{5}}{\binom{15}{7}} \approx \underline{0,4308}$$

c) W - zufällige Wert der 7 gekauften Keksschachteln

$8,6 \text{ €} \cdot (7 - X) =$ Wert der Keksschachteln ohne Extraüberraschung.
$20,6 \text{ €} \cdot X =$ Wert der Keksschachteln mit Extraüberraschung.

$$\begin{aligned} W &= 8,6 \text{ €} \cdot (7 - X) + 20,6 \text{ €} \cdot X \\ &= 60,20 \text{ €} + 12 \text{ €} \cdot X \\ \mathbf{E}W &= 60,20 \text{ €} + 12 \text{ €} \cdot \mathbf{E}X \\ &= 60,20 \text{ €} + 12 \text{ €} \cdot \frac{28}{15} \\ &= \underline{82,60 \text{ €}} \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\mathbf{E}X = n \cdot \frac{M}{N} = 7 \cdot \frac{4}{15} = \frac{28}{15}.$$

3. Aufgabe: Es ist bekannt, dass 40% aller Menschen die Blutgruppe Null besitzen. Nach einem Aufruf zur Blutspende melden sich unabhängig voneinander 10 Studenten im Kreiskrankenhaus zur Spende.

a) Wie ist die zufällige Anzahl X der Studenten mit Blutgruppe Null verteilt? (Parameter nicht vergessen!)

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als ein Student die Blutgruppe Null besitzt?

c) 120 Euro ist der Wert einer Blutspende bei der Blutgruppe Null, bei allen anderen Blutgruppen sind es 10 Euro weniger. Wie groß ist der erwartete Wert der Blutspenden der 10 Studenten?

<u>Lösung:</u>

X - zufällige Anzahl der Blutspenden mit Blutgruppe Null unter den 10 Spenden.

a) X ist binomialverteilt ($X \sim \mathbf{Bin}(n, p)$) mit $n = 10$ und $p = 0,4$.

b)

$$\begin{aligned} P(X > 1) &= 1 - P(X \leq 1) \\ &= 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) \\ &= 1 - \left(\binom{10}{0} \cdot 0,4^0 \cdot 0,6^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0,4^1 \cdot 0,6^9 \right) \\ &= 1 - (0,00605 + 0,04031) \approx \underline{0,954} \end{aligned}$$

c) W - zufällige Wert der 10 Blutspenden.

120 € $\cdot X$ = Wert der Blutspenden mit Blutgruppe Null.
110 € $\cdot (10 - X)$ = Wert der Blutspenden bei allen anderen Blutgruppen.

$$\begin{aligned} W &= 120 \text{ €} \cdot X + 110 \text{ €} \cdot (10 - X) \\ &= 10 \text{ €} \cdot X + 1100 \text{ €} \\ \mathbf{E}W &= 10 \text{ €} \cdot \mathbf{E}X + 1100 \text{ €} \\ &= 10 \text{ €} \cdot 4 + 1100 \text{ €} \\ &= \underline{1140 \text{ €}} \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\mathbf{E}X = n \cdot p = 10 \cdot 0,4 = 4.$$