4. Lösung weitere Übungsaufgaben Statistik I SoSe 2019

1. Aufgabe: Die Seiten eines zwölfseitigen Würfels sind mit den Zahlen 1 bis 12 bedruckt. Sei X die zufällige Augenzahl, welche nach einem Wurf oben liegt. Der Würfel sei symmetrisch, so dass alle Zahlen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gewürfelt werden.

a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion an! Wie ist X verteilt?

b) Bestimmen Sie den Erwartungswert, die Varianz, die Standardabweichung und den Variationskoeffizienten von X!

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

  i) die gewürfelte Augenzahl durch 3 teilbar ist?

  ii) die gewürfelte Augenzahl eine Primzahl ist?

  iii) die gewürfelte Augenzahl größer als 6 aber höchstens 10 ist?

Lösung: X - zufällige Augenzahl, welche oben liegt.

a)

$$P(X=k) = \frac{1}{12} \qquad k = 1, \ldots 12$$

X ist diskret gleichverteilt auf $\{1, 2, \ldots, 12\}$.

b)

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}X &= 1 \cdot P(X=1) + 2 \cdot P(X=2) + \ldots + 12 \cdot P(X=12) \\
&= (1+2+\ldots+12) \cdot \frac{1}{12} \\
&= \frac{12 \cdot 13}{2} \cdot \frac{1}{12} = \frac{13}{2} = \underline{6,5} \\
\mathbf{E}X^2 &= 1^2 \cdot P(X=1) + 2^2 \cdot P(X=2) + \ldots + 12^2 \cdot P(X=12) \\
&= (1^2 + 2^2 + \ldots + 12^2) \cdot \frac{1}{12} = \frac{650}{12} \\
\mathbf{Var}X &= \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}X)^2 \\
&= \frac{650}{12} - 6,5^2 = \underline{11,9167} \\
\sigma_X = \sqrt{\mathbf{Var}X} &= \sqrt{11,9167} = \underline{3,452}
\end{aligned}$$

Hinweis:
Ist X diskret gleichverteilt auf $\{1, 2, \ldots, n\}$, dann ist
$\mathbf{E}X = \frac{n+1}{2}$ und $\mathbf{Var}X = \frac{n^2-1}{12}$.

Hier ist $n = 12$ und damit $\mathbf{E}X = \frac{13}{2} = 6,5$ und $\mathbf{Var}X = \frac{12^2-1}{12} = \frac{143}{12} = 11,9167$.

$$\mathbf{V}_X = \frac{\sigma_X}{\mathbf{E}X} = \frac{3,452}{6,5} = \underline{0,531}$$

c) i) Die gewürfelte Augenzahl ist durch 3 teilbar:

$$P(X=3) + P(X=6) + P(X=9) + P(X=12) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

ii) Die gewürfelte Augenzahl ist eine Primzahl ist:

$$P(X=2) + P(X=3) + P(X=5) + P(X=7) + P(X=11) = \frac{5}{12}$$

iii) Die gewürfelte Augenzahl ist größer als 6 aber höchstens 10:

$$P(X=7) + P(X=8) + P(X=9) + P(X=10) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

2. Aufgabe:

Ein Atomreaktor muss notfallmäßig abgeschaltet werden, wenn die Temperatur im Reaktorkern über ein bestimmtes Niveau ansteigt. Dazu werden Bimetallschalter eingebaut, die bei Überschreitung der Grenztemperatur ein Signal auslösen.

Leider hat unter der gegebenen Strahlenbelastung jeder der Schalter eine begrenzte Lebensdauer L (in Tagen), wobei die Verteilungsfunktion mit den Parameter $\alpha = 2$ und $\beta = 0,5 \cdot 10^3$ in der folgenden Form gegeben ist:

$$F_L(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha} \qquad \text{falls} \qquad x \geq 0.$$

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass solch ein Schalter
   i) mindestens 500 Tage funktioniert?
   ii) höchstens 1000 Tage funktioniert?
   iii) mindestens 500 Tage und höchsten 1000 Tage funktioniert?

b) Bestimmen Sie den Median und die Viertelquantile (25% und 75%-Quantil) dieser Verteilung!

Lösung: L - zufällige Lebendauer (in Tagen).

a) i)

$$\begin{aligned} P(L \geq 500) &= 1 - P(L < 500) = 1 - F_L(500) \\ &= 1 - \left(1 - e^{-\left(\frac{500}{500}\right)^2}\right) = e^{-1} \approx \underline{0,3679} \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} P(L \leq 1000) &= F_L(1000) \\ &= 1 - e^{-\left(\frac{1000}{500}\right)^2} = 1 - e^{-4} \approx \underline{0,9817} \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} P(500 \leq L \leq 1000) &= F_L(1000) - F_L(500) \\ &= 1 - e^{-\left(\frac{1000}{500}\right)^2} - \left(1 - e^{-\left(\frac{500}{500}\right)^2}\right) = e^{-1} - e^{-4} \approx \underline{0,3496} \end{aligned}$$

b) p-Quantil:

$$\begin{aligned} F_L(x_p) &= p \\ 1 - e^{-\left(\frac{x_p}{500}\right)^2} &= p \\ e^{-\left(\frac{x_p}{500}\right)^2} &= 1 - p \\ -\left(\frac{x_p}{500}\right)^2 &= \ln(1-p) \\ \left(\frac{x_p}{500}\right)^2 &= -\ln(1-p) \\ x_p &= 500 \cdot \sqrt{-\ln(1-p)} \end{aligned}$$

Median, $p = 0.5$:

$$\begin{aligned} x_{0,5} &= 500 \cdot \sqrt{-\ln(1-0,5)} \\ &= 500 \cdot \sqrt{-\ln(0,5)} \\ &= 500 \cdot \sqrt{\ln(2)} = \underline{416,27} \end{aligned}$$

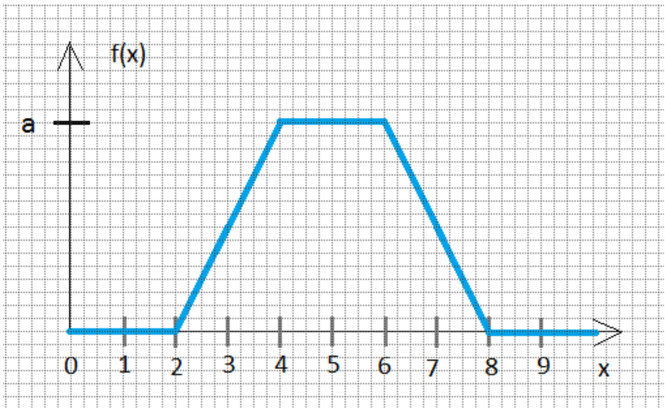
untere Viertelquantil, $p = 0.25$:

$$\begin{aligned} x_{0,25} &= 500 \cdot \sqrt{-\ln(1-0,25)} \\ &= 500 \cdot \sqrt{-\ln(0,75)} \\ &= 500 \cdot \sqrt{-\ln\left(\frac{3}{4}\right)} \\ &= 500 \cdot \sqrt{\ln\left(\frac{4}{3}\right)} = \underline{268,18} \end{aligned}$$

obere Viertelquantil, $p = 0.75$:

$$\begin{aligned} x_{0,75} &= 500 \cdot \sqrt{-\ln(1-0,75)} \\ &= 500 \cdot \sqrt{-\ln(0,25)} \\ &= 500 \cdot \sqrt{-\ln\left(\frac{1}{4}\right)} \\ &= 500 \cdot \sqrt{\ln(4)} = \underline{588,705} \end{aligned}$$

3. Aufgabe:



a) Bestimmen Sie a so, dass f die Dichte einer stetigen Zufallsvariable ist.

b) Begründen Sie, dass der Median dieser Verteilung gleich 5 ist.

c) Warum stimmen bei dieser Verteilung Median und Erwartungswert überein?

Lösung:

a) Die Fläche unter der Dichte ist die Gesamtwahrscheinlichkeit und damit gleich 1. In den Bereichen von 2 bis 4 und von 6 bis 8 sind die Flächen Dreiecke und im Bereich von 4 bis 6 ist die Fläche ein Rechteck.

$$\begin{aligned}\int_2^8 f(x)dx &= \int_2^4 f(x)dx + \int_4^6 f(x)dx + \int_6^8 f(x)dx \\ &= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot a + 2\cdot a + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot a = 4\cdot a = 1 \quad \Longrightarrow \quad \underline{a = \frac{1}{4} = 0,25}\end{aligned}$$

b) Die Zufallsvariable ist symmetrisch um 5 verteilt.
Damit ist $F_X(5) = P(X < 5) = 0,5$, d.h. der Median $x_{0,5}$ ist 5.

c) Bei einer symmetrischen Verteilung stimmen Median und Erwartungswert überein.