14. Lösung weitere Übungsaufgaben Statistik I SoSe 2019

1. Aufgabe: Die Wartezeit in einem Restaurant ist exponentialverteilt. Es liegt folgende Stichprobe von 10 unabhängig voneinander beobachteten Wartezeiten vor.

$$\begin{array}{lllll} x_1 = 6,2\text{ min} & x_2 = 1,8\text{ min} & x_3 = 1,5\text{ min} & x_4 = 14,9\text{ min} & x_5 = 4,3\text{ min} \\ x_6 = 4,8\text{ min} & x_7 = 2,4\text{ min} & x_8 = 5,4\text{ min} & x_9 = 5,5\text{ min} & x_{10} = 3,2\text{ min} \end{array}$$

a) Schätzen Sie die erwartete Wartezeit.

b) Schätzen Sie den Parameter λ der Exponentialverteilung.

<u>Lösung:</u> X- zufällige Wartezeit ($X \sim \mathbf{Exp}(\lambda)$)

a) Der Mittelwert ist eine Punktschätzung für den Erwartungswert, d.h. $\widehat{\mathbf{E}X} = \overline{X}$:

$$\overline{x} = \frac{1}{10}(6,2 + \ldots + 3,2) = \underline{5}$$

Aus den zehn beobachteten Stichprobenwerten wird die erwartete Wartezeit mit 5 Minuten geschätzt.

b) Für $X \sim \mathbf{Exp}(\lambda)$ gilt $\mathbf{E}X = \frac{1}{\lambda}$.
Damit ist ein Schätzer für λ (nach der Momentenmethode):

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\widehat{\mathbf{E}X}} = \frac{1}{\overline{X}} \quad \Longrightarrow \hat{\lambda} = \frac{1}{5} = \underline{0,2}$$

Aus den zehn beobachteten Stichprobenwerten wird der Parmater λ der Exponentialverteilung mit $0,2\text{ min}^{-1}$ geschätzt.

2. Aufgabe: Eine fränkische Winzergenossenschaft füllt den Wipfelder Zehntgraf in Bocksbeutel ab. Es ist davon auszugehen, dass die Füllmenge X der Bocksbeutel normalverteilt ist.

12 Messungen (in *ml*) ergaben die folgende Stichprobe:

$$\begin{array}{llllll} x_1 = 751,5 & x_2 = 749,9 & x_3 = 750,3 & x_4 = 752,3 & x_5 = 751,4 & x_6 = 753,4 \\ x_7 = 751,6 & x_8 = 751,4 & x_9 = 750,7 & x_{10} = 751,8 & x_{11} = 753,8 & x_{12} = 751,4 \end{array}$$

a) Wie lauteten die Schätzungen für den Erwartungswert und die Varianz von X?

b) Schätzen Sie die Parameter der Normalverteilung.

<u>Lösung:</u> X- zufällige Füllmenge ($X \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$)

a) Der Mittelwert ist eine Punktschätzung für den Erwartungswert, d.h. $\widehat{\mathbf{E}X} = \overline{X}$:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{12}(751,5 + \ldots + 751,4) = \underline{751,626}$$

Aus den 12 gemessenen Stichprobenwerten wird die erwartete Füllmenge mit ca. 751,6 ml geschätzt.

Die empirische Varianz ist eine Punktschätzung für die Varianz,
d.h. $\widehat{\mathbf{Var}X} = S^2$:

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2 \\ &= \frac{1}{11}((751,5-751,625)^2+\ldots+(751,4-751,625)^2) = \underline{1,283863} \end{aligned}$$

Aus den 12 gemessenen Stichprobenwerten wird die Varianz der Füllmenge mit ca. 1,28 ml^2 geschätzt.

b) Die beiden Parameter der Normalverteilung μ und σ^2 sind gerade der Erwartungswert ($\mu = \mathbf{E}X$) und die Varianz ($\sigma^2 = \mathbf{Var}X$). Die Schätzungen dafür wurden schon in a) ermitteltet. Es sind also:

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \overline{x} = \underline{751,625} \\ \hat{\sigma^2} &= s^2 = \underline{1,283863} \end{aligned}$$

3. Aufgabe: Am Ende einer Ortschaft wurde eine Verkehrsstudie durchgeführt. Innerhalb einer festen Zeitspanne wurden 40 Fahrzeuge gezählt, darunter befanden sich 12 LKWs.

a) Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das nächste Fahrzeug, welches die Ortschaft verlässt, ein LKW ist.

b) Am nächsten Tag wurde erneut eine Verkehrszählung durchgeführt. Es wurde immer die Anzahl der Fahrzeuge bis einschließlich des ersten LKWs notiert und dann wieder von vorne begonnen zu zählen. Man erhielt die folgende Stichprobe:

$$\begin{array}{llllll} x_1=4 & x_2=1 & x_3=3 & x_4=5 & x_5=1 & x_6=2 \\ x_7=4 & x_8=2 & x_9=1 & x_{10}=8 & x_{11}=1 & x_{12}=4 \end{array}$$

i. Wie ist die zufällige Anzahl X der Fahrzeuge bis zum ersten LKW verteilt?

ii. Wie lautet die Schätzung für den Parameter der Verteilung nach der Momentenmethode?

<u>Lösung:</u>

a) Bernoulli-Verteilung:

$$X_i = \begin{cases} 1 & : \text{falls } i\text{-te Fahrzeug ein LKW ist} \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad X_i \sim \mathbf{B}(p)$$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ sind unabhängig

$$\Longrightarrow \qquad Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathbf{Bin}(n,p) \qquad \text{(Binomialverteilung)}$$

Bei $n = 40$ wurde $y = 12$ beobachtet:

$$\Longrightarrow \qquad \hat{p} = \overline{x} = \frac{y}{n} = \frac{12}{40} = \frac{3}{10} = \underline{0,3}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass das nächste Fahrzeug, welches die Ortschaft verlässt, ein LKW ist, wird mit 0,3 (30%) geschätzt.

b) i. $X \sim \mathbf{Geo}(p)$, d.h. X ist geometrisch verteilt mit Parameter p.

ii.

$$\mathbf{E}X = \frac{1}{p} \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{1}{\mathbf{E}X}$$

Der Mittelwert ist ein Schätzer für den Erwartungswert:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{E}X} = \overline{x} = \frac{4+1+3+\ldots+4}{12} = \frac{36}{12} &= 3 \\ \text{Momentenmethode} \quad \Longrightarrow \quad \hat{p} = \frac{1}{\widehat{\mathbf{E}X}} = \frac{1}{3} &= \underline{0,33} \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass das nächste Fahrzeug, welches die Ortschaft verlässt, ein LKW ist, wird aus den 12 Stichprobenwerten mit 0,3333 (33,33%) geschätzt.

Zusatz:
Man erhält den gleichen Schätzwert für p, wenn man ausgehend von der Stichprobe in b) die Schätzung wie in a) bestimmt.

Unter 36 (=4+1+3+...4) Fahrzeugen waren 12 LKWs.

$$\hat{p} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$