

13. Lösung weitere Übungsaufgaben Statistik I SoSe 2019

1. **Aufgabe:** Für eine Grundgesamtheit aus 2000 Untersuchungseinheiten soll eine geschichtete Stichprobe vom Umfang $n = 200$ geplant werden. Für eine Einteilung in drei Schichten liegen folgende Informationen vor:

Schicht i	Anzahl N_i	Varianz σ_i^2
1	500	16
2	700	25
3	800	49

- a) Wie groß sind die Stichprobenumfänge in den 3 Schichten bei einer proportional geschichteten Stichprobe?
- b) Bestimmen Sie die Stichprobenumfänge in den drei Schichten für eine varianz-optimal geschichtete Stichprobe!

Lösung:

- a) Proportional geschichteten Stichprobe mit $n = 200$:

i	N_i	$p_i = \frac{N_i}{N}$	$n_i = p_i \cdot n$
1	500	0,25	50
2	700	0,35	70
3	800	0,40	80
Σ	$N = 2000$	1,00	200

Es ergeben sich bei der (exakt) proportional geschichteten Stichprobe ganzzahlige Werte, so dass ein Runden auf ganze Zahlen nicht mehr notwendig ist. Damit verwendet man als Stichprobenumfänge in den drei Schichten $n_1 = 50$, $n_2 = 70$ und $n_3 = 80$.

- b) varianzoptimal geschichtete Stichprobe mit $n = 200$:

i	N_i	$p_i = \frac{N_i}{N}$	σ_i	$p_i \cdot \sigma_i$	$n_i = \frac{n}{\sum_{j=1}^k p_j \cdot \sigma_j} \cdot p_i \cdot \sigma_i$	n_i ganzzahlig
1	500	0,25	4	1	36,036	36
2	700	0,35	5	1,75	63,063	63
3	800	0,40	7	2,8	100,9	101
Σ	$N = 2000$	1,00		5,55		200

Die ganzzahlig gerundeten Werte von n_i ergeben in der Summe $n = 200$. Damit verwendet man als Stichprobenumfänge in den drei Schichten $n_1 = 36$, $n_2 = 63$ und $n_3 = 101$.

2. **Aufgabe:** Für eine Stichprobe stehen maximal 510 € zur Verfügung. Die Grundgesamtheit wurde in 3 Schichten aufgeteilt. Für diese Schichten sind die folgenden Werte bekannt:

Schicht i	Anteil p_i	Standardabweichung σ_i	Kosten c_i
1	0,5	7	9
2	0,2	3	16
3	0,3	5	4

- a) Bestimmen Sie die Stichprobenumfänge in den drei Schichten für eine varianzoptimal geschichtete Stichprobe mit Stichprobenumfang $n = 200$!
- b) Bestimmen Sie die Stichprobenumfänge für eine kostenoptimal geschichtete Stichprobe!

Lösung:

- a) Proportional geschichteten Stichprobe mit $n = 200$:

i	p_i	$n_i = p_i \cdot n$
1	0,5	100
2	0,2	40
3	0,3	60
Σ	1,00	200

Es ergeben sich bei der (exakt) proportional geschichteten Stichprobe ganzzahlige Werte, so dass ein Runden auf ganze Zahlen nicht mehr notwendig ist. Damit verwendet man als Stichprobenumfänge in den drei Schichten $n_1 = 100$, $n_2 = 40$ und $n_3 = 60$.

- b) kostenoptimal geschichtete Stichprobe mit $c = 510$ €:

i	p_i	σ_i	c_i	$p_i \cdot \sigma_i \cdot \sqrt{c_i}$	$n_i = \frac{c}{\sum_{j=1}^k p_j \cdot \sigma_j \cdot \sqrt{c_j}} \cdot \frac{p_i \cdot \sigma_i \cdot \sqrt{c_i}}{c_i}$	n_i ganzzahlig	Kosten $n_i \cdot c_i$
1	0,5	7	9	10,5	37,421	37	333
2	0,2	3	16	2,4	4,8113	5	80
3	0,3	5	4	3	24,057	24	96
Σ	1,00			15,9			509

Eine Stichprobe mit den ganzzahlig gerundeten Werte von n_i kostet 509 €. Damit werden die Gesamtkosten von 510 € eingehalten. Für den einen Euro, welcher noch übrig ist, kann keine weitere Stichprobe gekauft werden. Damit verwendet man als Stichprobenumfänge in den drei Schichten $n_1 = 37$, $n_2 = 5$ und $n_3 = 24$.

- 3. Aufgabe:** Für eine Grundgesamtheit aus 2000 Untersuchungseinheiten soll eine geschichtete Stichprobe geplant werden. Für eine Einteilung in drei Schichten liegen folgende Informationen vor:

Schicht i	Anzahl N_i	Varianz σ_i^2	Kosten c_i
1	200	49	4
2	800	36	9
3	1000	25	16

- a) Wie groß sind die Stichprobenumfänge in den 3 Schichten bei einer proportional geschichteten Stichprobe mit Stichprobenumfang $n = 100$?
- b) Für die Gesamtstichprobe stehen maximal 1100 € zur Verfügung. Bestimmen Sie die Stichprobenumfänge in den drei Schichten für eine kostenoptimal geschichtete Stichprobe.

Lösung:

- a) varianzoptimal geschichtete Stichprobe mit $n = 100$:

i	N_i	$p_i = \frac{N_i}{N}$	σ_i	$p_i \cdot \sigma_i$	$n_i = \frac{n}{\sum_{j=1}^k p_j \cdot \sigma_j} \cdot p_i \cdot \sigma_i$	n_i ganzzahlig
1	200	0,1	7	0,7	12,5	12
2	800	0,4	6	2,4	42,857	43
3	1000	0,5	5	2,5	44,643	45
Σ	$N = 2000$			5,6		100

Die ganzzahlig gerundeten Werte von n_i ergeben in der Summe $n = 100$. Damit verwendet man als Stichprobenumfänge in den drei Schichten $n_1 = 12$, $n_2 = 43$ und $n_3 = 45$.

- b) kostenoptimal geschichtete Stichprobe mit $c = 1100$ €:

$$n_i = \frac{c}{\sum_{j=1}^k p_j \cdot \sigma_j \cdot \sqrt{c_j}} \cdot \frac{p_i \cdot \sigma_i \cdot \sqrt{c_i}}{c_i}$$

i	N_i	p_i	σ_i	c_i	$p_i \cdot \sigma_i \cdot \sqrt{c_i}$	n_i	n_i ganzzahlig	Kosten $n_i \cdot c_i$
1	200	0,1	7	4	1,4	20,699	21	84
2	800	0,4	6	9	7,2	47,312	47	423
3	1000	0,5	5	16	10	36,962	37	592
Σ	$N = 2000$	1,00			18,6			1099

Eine Stichprobe mit den ganzzahlig gerundeten Werte von n_i kostet 1099 €. Damit werden die Gesamtkosten von 1100 € eingehalten. Für den einen Euro, welcher noch übrig ist, kann keine weitere Stichprobe gekauft werden. Damit verwendet man als Stichprobenumfänge in den drei Schichten $n_1 = 21$, $n_2 = 47$ und $n_3 = 37$.