Lösung zu den Übungsbeispielen aus der 4. Vorlesung

Übungsbeispiel 1.9: Hypergeometrische Verteilung

Ein Kunde übernimmt alle 50 gelieferten Schaltkreise, wenn in einer Stichprobe von 10 Schaltkreisen höchstens ein nicht voll funktionsfähiger Schaltkreis enthalten ist. Ansonsten wird die gesamte Lieferung verworfen.
Man berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die 50 Schaltkreise

a) abgenommen werden, obwohl diese 12 nicht voll funktionsfähige Schaltkreise enthalten;

b) zurückgewiesen werden, obwohl nur 3 nicht voll funktionsfähige Schaltkreise enthalten sind !

Lösung: Die Zufallsgröße X beschreibe den Sachverhalt:

$X \ldots$„Anzahl der nicht voll funktionsfähigen Schaltkreise in der Stichprobe“

a) Angenommen die Lieferung enthält 12 nicht voll funktionsfähige Schaltkreise. Dann ist X hypergeometrisch-verteilt mit den folgenden Parametern.

$$X \sim \mathbf{Hyp}(N, M, n); \quad N = 50; \quad M = 12; \quad n = 10$$

Die Lieferung der Schaltkreise wird angenommen, wenn $X \leq 1$. Da hypergeometrisch-verteilte Zufallsgrößen nur natürliche Zahlen k mit

$$0 = \max\{n - (N - M); 0\} \leq k \leq \min\{n; M\} = 10$$

mit positiver Wahrscheinlichkeit annehmen, gilt

$$\mathrm{P}(X \leq 1) = \mathrm{P}(X = 0) + \mathrm{P}(X = 1). \tag{0–1}$$

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion der hypergeometrischen Verteilung lautet $\mathrm{P}(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\cdot\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$. Wenn man diese auf die Gleichung (0–1) anwendet, erhält man

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X \leq 1) &= \frac{\binom{12}{0}\cdot\binom{50-12}{10-0}}{\binom{50}{10}} + \frac{\binom{12}{1}\cdot\binom{50-12}{10-1}}{\binom{50}{10}} \\ &= 0,0460 + 0,1904 \\ &= 0,2364 \end{aligned}$$

D.h. mit einer Wahrscheinlichkeit von $23,64\%$ wird die Lieferung angenommen obwohl diese 12 nicht voll funktionsfähige Schaltkreise enthalten.

b) Angenommen, es sind nur 3 nicht funktionsfähige Schaltkreise enthalten. Dann ist X wieder hypergeometrisch Verteilt. Diesmal mit den folgenden Parametern.

$$X \sim \mathbf{Hyp}(N, M, n); \quad N = 50; \quad M = 3; \quad n = 10$$

Die Lieferung wird zurückgewiesen, wenn $X > 1$. Es gilt

$$\mathrm{P}(X > 1) = 1 - \mathrm{P}(X \leq 1).$$

Die Wahrscheinlichkeit $\mathrm{P}(X \leq 1)$ berechnet sich analog zu (a).

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X \leq 1) &= \mathrm{P}(X = 0) + \mathrm{P}(X = 1) \\ &= \frac{\binom{3}{0} \cdot \binom{50-3}{10-0}}{\binom{50}{10}} + \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{50-3}{10-1}}{\binom{50}{10}} \\ &= 0,504 + 0,398 \\ &= 0,902. \end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\mathrm{P}(X > 1) = 1 - 0,902 = 0,098.$$

D.h. mit einer Wahrscheinlichkeit von 9,8% wird die Lieferung abgelehnt, wenn diese nur 3 nicht voll funktionsfähige Schaltkreise enthalten.

□

Übungsbeispiel 1.10: Poissonverteilung

a) Die zufällige Anzahl X der Schadensfälle bei einer Versicherungsagentur sei für Zeitintervalle einer bestimmten Länge poissonverteilt mit Parameter $\lambda = 3$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einem Zeitintervall dieser Länge mindestens zwei Schadensfälle eintreten?

b) Es werden 50 Erzeugnisse aus einer Lieferung mit einer Ausschusswahrscheinlichkeit von 0.01 untersucht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich höchstens ein fehlerhaftes Erzeugnis unter den 50 Erzeugnissen befindet?

Lösung:

a) Die Zufallsvariable

$$X \ldots \text{Anzahl Schadensfälle bei einer Versicherungsagentur}$$

besitzt gemäß Aufgabe die Verteilung

$$X \sim \mathbf{Poi}(3)$$

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $\mathrm{P}(X \geq 2)$. Ein Übergang zum Gegenereignis ergibt

$$\mathrm{P}(X \geq 2) = 1 - \mathrm{P}(X < 2) \tag{0–2}$$

Poissonverteilte Zufallsgrößen nehmen nur die natürlichen Zahlen mit positiver Wahrscheinlichkeit an. Damit erhält man

$$\mathrm{P}(X < 2) = \mathrm{P}(X = 0) + \mathrm{P}(X = 1) \tag{0–3}$$

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Poissonverteilung ist

$$\mathrm{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \qquad k = 0, 1, 2, ... \tag{0–4}$$

Wenn man (0–4) auf die Gleichung (0–3) anwendet erhält man

$$\mathrm{P}(X < 2) = \frac{3^0}{0!} e^{-3} + \frac{3^1}{1!} e^{-3} = 0,0498 + 0,1494 = 0,1992.$$

Zusammen mit Gleichung (0–2) erhält man abschließend

$$\mathrm{P}(X \geq 2) = 1 - 0,1992 = 0,8008.$$

D.h. die Wahrscheinlichkeit für mindestens zwei Schadenfälle beträgt 80,08%.

b) **Exakte Lösung:** Die Zufallsgröße X beschreibe den folgenden Sachverhalt:

$X \ldots$ „Anzahl der fehlerhaften Erzeugnisse"

X folgt einer Binomialverteilung mit den folgenden Parametern.

$$X \sim \mathbf{B}(n, p), \quad n = 50, \quad p = 0,01$$

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $\mathrm{P}(X \leq 1)$. Mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion der Binomialverteilung erhält man

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X \leq 1) &= \mathrm{P}(X = 0) + \mathrm{P}(X = 1) \\ &= \binom{50}{0} 0,01^0 \cdot (1 - 0,01)^{50-0} + \binom{50}{1} 0,01^1 \cdot (1 - 0,01)^{50-1} \\ &= 0,6050 + 0,3056 \\ &= 0,9105 \end{aligned}$$

D.h. die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich höchstens ein fehlerhaftes unter 50 Erzeugnissen befindet, beträgt 91,05%.

Approximative Lösung: Für große n ($n \geq 30$) und kleines p ($p \leq 0,05$) gilt $\mathrm{P}(X = k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ mit $\lambda = n \cdot p$. Damit erhält man als approximative Lösung

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X \leq 1) &= \mathrm{P}(X = 0) + \mathrm{P}(X = 1) \\ &\approx \frac{(50 \cdot 0,01)^0}{0!} e^{-(50 \cdot 0,01)} + \frac{(50 \cdot 0,01)^1}{1!} e^{-(50 \cdot 0,01)} \\ &= 0,6065 + 0,3032 \\ &= 0,9097 \end{aligned}$$

□