Statistik I für Betriebswirte
Vorlesung 13

Dr. Andreas Wünsche

TU Bergakademie Freiberg
Institut für Stochastik

8. Juli 2019

3.3 Parameterschätzungen: Konfidenzschätzungen

- Ein Nachteil von Punktschätzungen ist darin zu sehen, dass diese als Zufallsgrößen mit einer Verteilung mit einer positiven Varianz den „wahren“ Wert des Parameters ϑ nur selten „exakt treffen“. Bei stetigen Verteilungen, wie z.B. der Normalverteilung, geschieht dies sogar nur mit Wahrscheinlichkeit Null, da z.B. $P\left(\overline{X} = \mu\right) = 0$ gilt.
- Daher ist es häufig besser, einen ganzen Bereich (ein ganzes Intervall) als Schätzung anzubieten, dieser Bereich soll dann den unbekannten tatsächlichen Parameter mit hoher Wahrscheinlichkeit überdecken.
- Das Intervall I ist ein Konfidenzintervall (Vertrauensintervall) oder allgemeiner eine Konfidenzschätzung für den Parameter ϑ zum Niveau $1-\alpha$, wenn $P(\vartheta \in I) \geq 1-\alpha$ gilt.
- Dabei wird eine Zahl $0 < \alpha < 1$, üblicherweise nahe 0, vorgegeben. Sie gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der Fehlentscheidungen (der wahre Parameter wurde nicht überdeckt) akzeptiert werden.

Konfidenzintervalle

- Wenn also für 100 verschiedene Stichproben aus ein und derselben Grundgesamtheit für ein und denselben Parameter jeweils ein Konfidenzintervall zum Niveau $1-\alpha$ bestimmt wird, werden im Mittel $(1-\alpha)\cdot 100$ Intervalle den unbekannten Parameter überdecken und $\alpha \cdot 100$ nicht. Ob das eine konkret berechnete Intervall den Parameter überdeckt oder nicht, ist aber nicht entscheidbar.
- Jeder Parameterwert aus dem Konfidenzintervall I kann als wahrer Parameterwert akzeptiert werden, allerdings mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von α.
- Ausgangspunkt zur Konstruktion eines Konfidenzintervalles für einen Parameter ϑ ist meistens eine Schätzgröße für eine Punktschätzung $\hat{\vartheta}$. Dazu muss man jedoch die exakte (oder asymptotische) Verteilung der Schätzfunktion oder einer geeigneten abgeleiteten Stichprobenfunktion finden.

Konfidenzintervall für μ falls $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, σ^2 bekannt

- Wegen $\overline{X} \sim \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ gilt $\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim \mathrm{N}(0,1)$.
- Mit dem Quantil $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ zum Niveau $1 - \frac{\alpha}{2}$ der Standardnormalverteilung $\left(\text{d.h. } \Phi(z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ gilt dann

$$P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \le z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha\,,$$

$$P\left(\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} \le \mu \le \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha\,.$$

- Damit erhält man die Formel für das (zweiseitige) Konfidenzintervall I_μ für den Erwartungswert μ der Normalverteilung bei bekannter Varianz σ^2 zum Konfidenzniveau $1 - \alpha$

$$I_\mu = \left[\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\,;\, \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right].$$

Zahlenbeispiel 3.5

- **Aufgabe:** 10 Wägungen eines leichten Objektes (auf einer Apothekerwaage) ergaben (in mg):

  10.3 10.1 10.4 9.9 10.2 9.6 10.0 10.2 10.3 10.0.

  Die Waagengenauigkeit sei mit $\sigma = 0.25$ bekannt, die Messwerte können als normalverteilt angenommen werden.
  Bestimmen Sie das konkrete Konfidenzintervall für μ zur Irrtumswahrscheinlichkeit von 0.05!

- **Lösung:** $\alpha = 0.05 \;\Rightarrow\; 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975 \;\Rightarrow\; z_{0.975} = 1.96$,
  $n = 10$, $\overline{x} = 10.1 \quad \Rightarrow$

$$I = \left[10.1 - \frac{0.25}{\sqrt{10}} \cdot 1.96\, ;\; 10.1 + \frac{0.25}{\sqrt{10}} \cdot 1.96 \right],$$

$$I = [9.945\, ;\; 10.255]\,.$$

Notwendiger Stichprobenumfang

- Aus einer vorgegebenen Überdeckungswahrscheinlichkeit $1-\alpha$ und einer vorgegebenen Intervalllänge kann man den dazu notwendigen Stichprobenumfang ableiten.
- In dem schon behandelten Fall eines Konfidenzintervalles für den Erwartungswert μ einer normalverteilten Grundgesamtheit bei bekannter Varianz σ^2 beträgt die halbe Intervalllänge

$$d = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \quad \text{folglich} \quad n \geq \left(\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{d} \right)^2 \sigma^2 .$$

- Im Wägebeispiel 3.5 ergibt das für $\alpha = 0.05\,, d = 0.1$ einen Wert von $n = 24$.
- In anderen Situationen hängen häufig mehrere Größen in der Formel für die Intervalllänge von n ab, z.B. das vorkommende Quantil. Dann kann man mit einem iterativen Vorgehen den notwendigen Stichprobenumfang bestimmen.

Allgemeine Wirkung von α und n

- **Allgemeine Wirkung der Irrtumswahrscheinlichkeit** α:

  Je kleiner α ist, desto größer ist bei gegebenem n das Konfidenzintervall, d.h. desto unschärfer wird ϑ lokalisiert, desto größer ist aber auch die Überdeckungswahrscheinlichkeit.

- **Allgemeine Wirkung des Stichprobenumfangs** n:

  Je größer n ist, desto kleiner wird bei gegebenem α das Konfidenzintervall, d.h. umso schärfer wird ϑ lokalisiert.

Statistische Prüfverteilungen

- Zur Bestimmung von Konfidenzintervallen für Parameter der Normalverteilung und die später zu behandelnden statistischen Tests benötigt man Quantile von bestimmten Verteilungen, die mit der Normalverteilung zusammenhängen und die man statistische Prüfverteilungen nennt. Dies sind
  - die χ^2-Verteilung (Chi-Quadrat-Verteilung),
  - die t-Verteilung (Student-Verteilung) und
  - die F-Verteilung (Fisher-Verteilung).
- In den nachfolgenden Folien zu den speziellen Prüfverteilungen seien deshalb $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige normalverteilte Zufallsgrößen mit jeweils Erwartungswert μ und Varianz σ^2 und

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \,,$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2 \,.$$

Die χ^2-Verteilung (Chi-Quadrat-Verteilung) I

- **Parameter:** $m \in \mathbb{N}$ („Anzahl der Freiheitsgrade").
- Es seien $Z_1, \ldots, Z_m$ unabhängige und identisch standardnormalverteilte Zufallsgrößen (Z_i i.i.d. mit $Z_i \sim \mathrm{N}(0,1)$, $i = 1, \ldots, m$). Dann ist die Zufallsgröße X mit

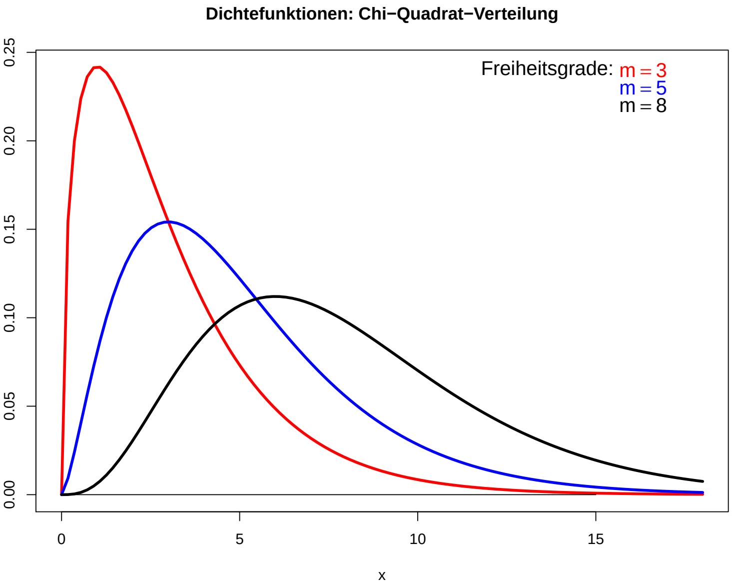
$$X = Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots + Z_m^2 = \sum_{i=1}^{m} Z_i^2$$

  χ^2-verteilt mit m-Freiheitsgraden.
- **Bezeichnung:** $X \sim \chi_m^2$.
- Es ist für $X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, u.i.v. (i.i.d.),

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 \quad \chi^2 - \text{verteilt mit } n \text{ Freiheitsgraden und}$$

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2 \quad \chi^2 - \text{verteilt mit } n-1 \text{ Freiheitsgraden.}$$

Die χ^2-Verteilung (Chi-Quadrat-Verteilung) II



Die t-Verteilung (Student-Verteilung) I

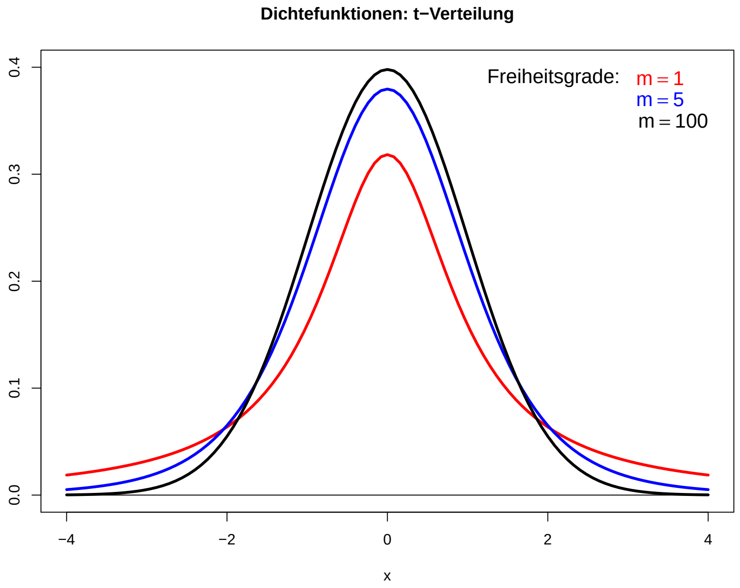
- **Parameter:** $m \in \mathbb{N}$ („Anzahl der Freiheitsgrade“).
- Es seien Z und X unabhängige Zufallsgrößen mit $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ (standardnomalverteilt) und $X \sim \chi^2_m$ (χ^2-verteilt mit m Freiheitsgraden). Dann ist die Zufallsgröße Y mit

$$Y = \frac{Z}{\sqrt{\frac{X}{m}}}$$

  t-verteilt mit m-Freiheitsgraden.
- **Bezeichnung:** $Y \sim t_m$.
- Es ist für $X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, u.i.v., $S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}$

$$\sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu}{S} \quad t - \text{verteilt mit } n-1 \text{ Freiheitsgraden.}$$

Die t-Verteilung (Student-Verteilung) II



Die F-Verteilung (Fisher-Verteilung) I

- **Parameter:** $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ („Anzahl der Freiheitsgrade“).
- Es seien X_1 und X_2 zwei unabhängige χ^2-verteilte Zufallsgrößen mit m_1 und m_2 Freiheitsgraden. Dann ist die Zufallsgröße Y mit

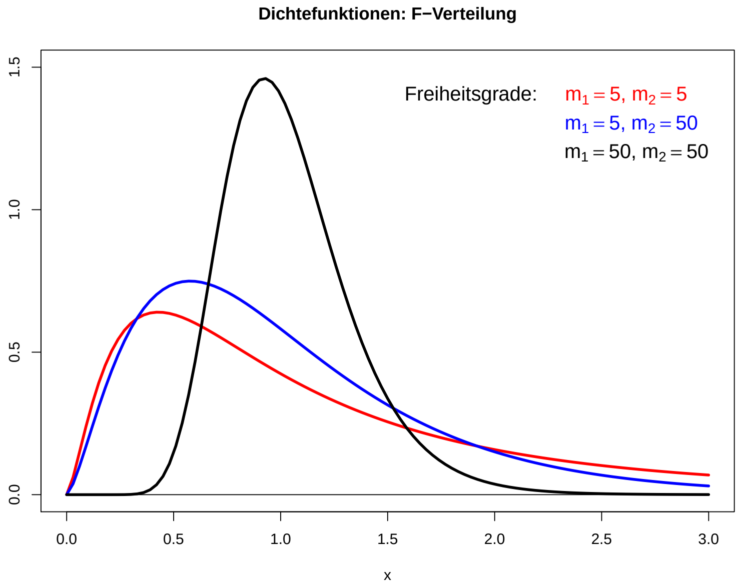
$$Y = \frac{\frac{X_1}{m_1}}{\frac{X_2}{m_2}}$$

  F-verteilt mit den beiden Freiheitsgraden m_1 und m_2.
- **Bezeichnung:** $Y \sim F_{m_1,m_2}$.
- Für zwei unabhängige normalverteilte Stichproben
  X_{1i} ($X_{1i} \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$) $i = 1, \ldots, n_1$ ($\hat{\sigma}_1^2 = S_1^2$) und
  X_{2i} ($X_{2i} \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$) $i = 1, \ldots, n_2$ ($\hat{\sigma}_2^2 = S_2^2$) ist

$$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}$$

  F-verteilt mit den Freiheitsgraden $n_1 - 1$ und $n_2 - 1$.

Die F-Verteilung (Fisher-Verteilung) II



Konfidenzintervall für μ falls $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, σ^2 unbekannt

- Es ist für $X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, u.i.v., $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2}$

$$\sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu}{S} \quad t-\text{verteilt mit } n-1 \text{ Freiheitsgraden.}$$

- Mit dem Quantil $t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$ zum Niveau $1 - \frac{\alpha}{2}$ der t-Verteilung mit $n-1$ Freiheitsgraden gilt dann

$$P\left(-t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} \leq \sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu}{S} \leq t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha\,,$$

$$P\left(\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} \leq \mu \leq \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha\,.$$

- Damit erhält man die Formel für das (zweiseitige) Konfidenzintervall I_μ für den Erwartungswert μ der Normalverteilung bei unbekannter Varianz σ^2 zum Konfidenzniveau $1 - \alpha$

$$I_\mu = \left[\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\,;\, \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\right]\,.$$

Beispielaufgabe 3.6

- **Aufgabe:** In einem Betrieb werden unter anderem grüne Bohnen in Dosen abgefüllt. Bei einer Stichprobe von 25 Dosen wurden folgende Abfüllgewichte in g ermittelt:

  173 , 176 , 172 , 176 , 175 , 174 , 172 , 173 , 173 ,
  178 , 176 , 177 , 175 , 176 , 173 , 172 , 175 ,
  174 , 172 , 174 , 173 , 177 , 176 , 174 , 174 .

  Es wird angenommen, dass es sich bei den Werten um Realisierungen einer normalverteilten Zufallsgröße handelt.

  1. Bestimmen Sie einen Schätzer für das mittlere Abfüllgewicht μ !
  2. Geben Sie ein Konfidenzintervall zum Niveau 0.95 für das Durchschnittsgewicht an !

- **Größen zur Lösung:**

  $$\overline{x} = 174.4, \quad s = 1.756, \quad s^2 = 3.083,$$
  $$n = 25, \quad 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975, \quad t_{24;0.975} = 2.064.$$

Konfidenzintervall für σ^2 falls $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, μ **bekannt**

- Es ist für $X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, u.i.v., $S^{*2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2$,

$$\frac{nS^{*2}}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 \quad \chi^2 - \text{verteilt mit } n \text{ Freiheitsgraden.}$$

- Mit den Quantilen $\chi^2_{n;\frac{\alpha}{2}}$ bzw. $\chi^2_{n;1-\frac{\alpha}{2}}$ zu den Niveaus $\frac{\alpha}{2}$ bzw. $1 - \frac{\alpha}{2}$ der χ^2-Verteilung mit n Freiheitsgraden gilt dann

$$P\left(\chi^2_{n;\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{nS^{*2}}{\sigma^2} \leq \chi^2_{n;1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha\,,$$

$$P\left(\frac{nS^{*2}}{\chi^2_{n;1-\frac{\alpha}{2}}} \leq \sigma^2 \leq \frac{nS^{*2}}{\chi^2_{n;\frac{\alpha}{2}}}\right) = 1 - \alpha\,.$$

Konfidenzintervall für σ^2 falls $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, μ **bekannt**

- Damit erhält man die Formel für das (zweiseitige) Konfidenzintervall I_{σ^2} für die Varianz σ^2 der Normalverteilung bei bekanntem Erwartungswert μ zum Konfidenzniveau $1-\alpha$

$$I_{\sigma^2} = \left[\frac{nS^{*2}}{\chi^2_{n;1-\frac{\alpha}{2}}} \, ; \, \frac{nS^{*2}}{\chi^2_{n;\frac{\alpha}{2}}} \right] .$$

- Das (zweiseitige) Konfidenzintervall I_σ für die Standardabweichung σ der Normalverteilung bei bekanntem Erwartungswert μ zum Konfidenzniveau $1-\alpha$ erhält man daraus durch Berechnung der Quadratwurzeln:

$$I_{\sigma} = \left[\sqrt{\frac{nS^{*2}}{\chi^2_{n;1-\frac{\alpha}{2}}}} \, ; \, \sqrt{\frac{nS^{*2}}{\chi^2_{n;\frac{\alpha}{2}}}} \right] .$$

Konfidenzintervall für σ^2 falls $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, μ **unbekannt**

- Es ist für $X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, u.i.v., $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \left(X_i - \overline{X}\right)^2$,

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 \qquad \chi^2 - \text{verteilt mit } n-1$$

Freiheitsgraden.

- Mit den Quantilen $\chi^2_{n-1;\frac{\alpha}{2}}$ bzw. $\chi^2_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$ zu den Niveaus $\frac{\alpha}{2}$ bzw. $1-\frac{\alpha}{2}$ der χ^2-Verteilung mit $n-1$ Freiheitsgraden gilt dann

$$P\left(\chi^2_{n-1;\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha\,,$$

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;\frac{\alpha}{2}}}\right) = 1-\alpha\,.$$

Konfidenzintervall für σ^2 falls $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, μ **unbekannt**

- Damit erhält man die Formel für das (zweiseitige) Konfidenzintervall I_{σ^2} für die Varianz σ^2 der Normalverteilung bei unbekanntem Erwartungswert μ zum Konfidenzniveau $1-\alpha$

$$I_{\sigma^2} = \left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}} ; \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;\frac{\alpha}{2}}} \right] .$$

- Das (zweiseitige) Konfidenzintervall I_σ für die Standardabweichung σ der Normalverteilung bei unbekanntem Erwartungswert μ zum Konfidenzniveau $1-\alpha$ erhält man daraus durch Berechnung der Quadratwurzeln:

$$I_\sigma = \left[\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}}} ; \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;\frac{\alpha}{2}}}} \right] .$$

Einseitige Konfidenzintervalle

- Einseitige Konfidenzintervalle, d.h. nur obere bzw. nur untere Konfidenzgrenzen, erhält man, indem man bei den zweiseitigen Konfidenzintervallen die entsprechende Grenze wählt und bei den Quantilen $\frac{\alpha}{2}$ durch α ersetzt. Die andere Grenze wird dann entsprechend der möglichen Werte des Parameters gewählt, also z.B. $-\infty$ als untere Grenze für den Erwartungswert μ oder 0 als untere Grenze für die Varianz σ^2 oder die Standardabweichung σ.
- Oft verwendet werden einseitige Konfidenzintervalle mit oberer Konfidenzgrenze zur Intervallschätzung der Varianz σ^2 einer Normalverteilung; ist der Erwartungswert μ unbekannt, lautet das entsprechende Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau $1-\alpha$:

$$I_{\sigma^2} = \left[0\,;\, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;\alpha}}\right] .$$

Beispiel Konfidenzintervall für σ^2

- Im Wägebeispiel 3.5 waren:
  $n = 10\,, \quad \overline{x} = 10.1\,, \quad s^2 = 0.2357^2 = 0.0556\,,$
  die Werte werden als normalverteilt mit unbekanntem Erwartungswert μ und unbekannter Varianz σ^2 angenommen.
- Dann sind mit den Quantilen

$$\chi^2_{9;0.025} = 2.70\,, \quad \chi^2_{9;0.05} = 3.33\,, \quad \chi^2_{9;0.975} = 19.0$$

  die Konfidenzintervalle zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0.95$:
  - zweiseitig für σ^2: $I_{\sigma^2} = \left[\frac{9 \cdot 0.0556}{19.0}\,;\ \frac{9 \cdot 0.0556}{2.70}\right] = [0.0263\,;\ 0.1853]\,;$
  - zweiseitig für σ: $I_\sigma = \left[\sqrt{0.0263}\,;\ \sqrt{0.1853}\right] = [0.1622\,;\ 0.4305]\,;$
  - einseitig (oben) für σ^2: $I_{\sigma^2} = \left[0\,;\ \frac{9 \cdot 0.0556}{3.33}\right] = [0\,;\ 0.1503]\,;$
  - einseitig (oben) für σ: $I_\sigma = \left[0\,;\ \sqrt{0.1503}\right] = [0\,;\ 0.3877]\,.$

Asymptotische Konfidenzintervalle

- Die Konfidenzintervalle für den Erwartungswert bzw. die Varianz können als asymptotische Konfidenzintervalle auch für nicht-normalverteilte Merkmale (mit endlicher Varianz) genutzt werden, wenn der Stichprobenumfang n groß genug ist.
- Dabei genügt bei symmetrischen Verteilungen oft schon eine Anzahl von $n \approx 15$ Stichprobenwerten, während bei schiefen Verteilungen oft $n \approx 30$ noch nicht ausreicht.
- Auch eine unbekannte Wahrscheinlichkeit p kann mit Hilfe eines solchen asymptotischen Konfidenzintervalls geschätzt werden.

Konfidenzintervall für eine Wahrscheinlichkeit p

- **Aufgabe:** Intervallschätzung der Wahrscheinlichkeit p eines Ereignisses A, also $p = P(A)$.
- $X_i = \begin{cases} 1, & A \text{ tritt bei Beobachtung } i \text{ ein,} \\ 0, & A \text{ tritt bei Beobachtung } i \text{ nicht ein,} \end{cases} \quad (i = 1, \ldots, n).$
- Die *Schätzgröße* für p ist die relative Häufigkeit $\hat{p} = \overline{X}$, dabei ist die absolute Häufigkeit $X = n\overline{X}$ binomialverteilt mit Parametern n und p.
- Mit Hilfe des Grenzwertsatzes von Moivre-Laplace kann man ein asymptotisches Konfidenzintervall $I = [G_u\,;\, G_o]$ zum Konfidenzniveau $1 - \alpha$ konstruieren.
- Dieses kann für große Stichprobenumfänge n genutzt werden, als Faustregel gelten $n\hat{p} > 5$ und $n(1 - \hat{p}) > 5$.

Konfidenzintervall für eine Wahrscheinlichkeit p

- Mit dem Quantil $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ der Standardnormalverteilung zum Niveau $1-\dfrac{\alpha}{2}$ erhält man

$$G_u = \frac{1}{n + z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} \left[X + \frac{1}{2} z^2_{1-\frac{\alpha}{2}} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{X(n-X)}{n} + \frac{1}{4} z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} \right],$$

$$G_o = \frac{1}{n + z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} \left[X + \frac{1}{2} z^2_{1-\frac{\alpha}{2}} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{X(n-X)}{n} + \frac{1}{4} z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} \right].$$

- Eine einseitige untere Konfidenzgrenze wäre dann z.B. gegeben durch

$$G_u = \frac{1}{n + z^2_{1-\alpha}} \left[X + \frac{1}{2} z^2_{1-\alpha} - z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{X(n-X)}{n} + \frac{1}{4} z^2_{1-\alpha}} \right].$$

Beispiel 3.7: Konfidenzintervall für p

- **Aufgabe:** Zur Schätzung des Ausschussanteils eines umfangreichen Lieferpostens werde diesem eine Stichprobe von 200 Teilen entnommen. Dabei wurden 190 einwandfreie Teile festgestellt.
  1. Geben Sie eine Schätzung für den Ausschussanteil an.
  2. Berechnen Sie ein Konfidenzintervall für den Ausschussanteil zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0.95$.
- **Größen zur Lösung:**

  $n = 200, \quad \overline{x} = \frac{10}{200} = 0.05,$ absolute Häufigkeit $x = 10,$

  $1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975, \quad z_{0.975} = 1.96\,.$

Klausur Statistik I für Betriebswirte

- Termin: Montag, 29. Juli 2019, 7:30 - 9:30 Uhr.
- Raum:
  - Alte Mensa
- Als Hilfsmittel zugelassen für die Klausur sind Mitschriften, Ausdrucke, Formelsammlung, Bücher, Taschenrechner (auch ein programmierbarer), usw., also alles außer Kommunikationsmittel.
- Nicht zugelassen für die Klausur sind Notebook, Tablet, Handy, Smartphone, Smartwatch, usw., also alle möglichen Kommunikationsmittel.
- Achten Sie bitte auf nachvollziehbare Lösungswege.