Statistik I für Betriebswirte
Vorlesung 10

Dr. Andreas Wünsche

TU Bergakademie Freiberg
Institut für Stochastik

17. Juni 2019

2.3 Indexzahlen

2.3.1 Einfache Indexzahlen (Messzahlen)

- Indizes (Indexzahlen, Indexzeitreihen) dienen z.B. zur Beschreibung der zeitlichen Entwicklung bestimmter Größen und werden häufig in der Wirtschaftsstatistik oder Ökonometrie angewandt.
- Einfache Indexzahlen beschreiben die Entwicklung *einer* Maßzahl über die Zeit.
- Zur besseren Vergleichbarkeit werden Werte so normiert, dass der Wert zur Basiszeit gleich 1 (100%) ist.
- x_{t_0} : Maßzahl zur Basiszeit t_0 , x_t : Maßzahl zur Berichtszeit t

  $\Rightarrow \quad I_{t_0,t} = \frac{x_t}{x_{t_0}} (\cdot 100)$: einfache Indexzahl.
- **Beispiel 2.8** Umsatz einer Firma (in Tausend Euro)

Jahr	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
t	$0 =: t_0$	1	2	3	4	5	6	7
x_t	80	90	85	90	95	95	100	110
$I_{t_0,t}$	100	112.5	106.25	112.5	118.75	118.75	125	137.5

Umbasierung von Messzahlen

- Wechsel der Basiszeit: t_0 : alte Basiszeit; t_0' : neue Basiszeit.
- $$I_{t_0',t} = \frac{x_t}{x_{t_0'}}(\cdot 100) = \frac{x_t \cdot \frac{1}{x_{t_0}}}{x_{t_0'} \cdot \frac{1}{x_{t_0}}}(\cdot 100) = \frac{\frac{x_t}{x_{t_0}}}{\frac{x_{t_0'}}{x_{t_0}}}(\cdot 100) = \frac{I_{t_0,t}}{I_{t_0,t_0'}}(\cdot 100)$$

$$\Leftrightarrow \qquad I_{t_0,t_0'} \cdot I_{t_0',t} = I_{t_0,t}(\cdot 100) \quad \text{bzw.} \quad \frac{I_{t_0',t}}{I_{t_0',t_0'}} = \frac{I_{t_0,t}}{I_{t_0,t_0'}} \qquad (*).$$

- Eigenschaft $(*)$ heißt Verkettungseigenschaft.
- Im **Beispiel 2.8**

Jahr	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
t	$0 = t_0$	1	$2 = t_0'$	3	4	5	6	7
x_t	80	90	85	90	95	95	100	110
$I_{0,t}$	100	112.5	106.25	112.5	118.75	118.75	125	137.5
$I_{2,t}$	94.12	105.88	100	105.88	111.76	111.76	117.65	129.41

z.B. $I_{2,6} = \frac{100}{85} \cdot 100 = \frac{125}{106.25} \cdot 100 = 117.65$.

Verkettung von Messzahlen

- Gegeben seien eine alte Indexreihe $I_{t_0,1}, \ldots, I_{t_0,s}$ und eine neue $I'_{t'_0,s}, \ldots, I'_{t'_0,r}$.
- Verschiedene Basiszeiten.
- Indexreihen überschneiden sich genau im Zeitpunkt s .
- **Beispiel 2.9**

Jahr	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
t	0	1	2	3	4	5	6	7
$I_{0,t}$	100	112	120	124	144	160	–	–
$I'_{5,t}$	–	–	–	–	–	100	105	110
$I_{0,t}$	100	112	120	124	144	160	168	176
$I'_{5,t}$	62,5	70	75	77,5	90	100	105	110

- z.B. $168 = 105 \cdot \frac{160}{100}$ oder $70 = 112 \cdot \frac{100}{160}$.

Fortführung der alten Reihe und Rückrechnung der neuen Reihe

- Fortführung der alten Reihe für $t > s$:
  - **Idee:** Multipliziere alle Werte $I'_{t'_0,t}$ der neuen Reihe mit dem gleichen Faktor c , so dass $c \cdot I'_{t'_0,s} = I_{t_0,s}$ ist.

$$\Rightarrow \quad c = \frac{I_{t_0,s}}{I'_{t'_0,s}} \quad \Rightarrow \quad I_{t_0,t} = \frac{I_{t_0,s}}{I'_{t'_0,s}} \cdot I'_{t'_0,t} \,.$$

- Rückrechnung der neuen Reihe für $t < s$:
  - **Idee:** Multipliziere alle Werte $I_{t_0,t}$ der alten Reihe mit dem gleichen Faktor c' , so dass $c' \cdot I_{t_0,s} = I'_{t'_0,s}$ ist.

$$\Rightarrow \quad c' = \frac{I'_{t'_0,s}}{I_{t_0,s}} \quad \Rightarrow \quad I'_{t'_0,t} = \frac{I'_{t'_0,s}}{I_{t_0,s}} \cdot I_{t_0,t} \,.$$

- **Anmerkung:** Entsteht I' aus I durch Umbasieren, so führt die Verkettung von I und I' wieder zur ursprünglichen Reihe.

2.3.2 Zusammengesetzte Indexzahlen

- Verknüpfen gleichartige (einfache) Indexreihen zu einer zusammengesetzten Indexreihe.
- **Beispiele**:
  - Umsatz einzelner Firmen ⇒ Umsatzindex des Industriezweigs;
  - Wert einzelner Aktien ⇒ Aktienindex einer Branche, einer Region etc.
- Von besonderem Interesse
  - a) Preisindizes
  - b) Mengenindizes
  - c) Umsatzindizes (Wertindizes)

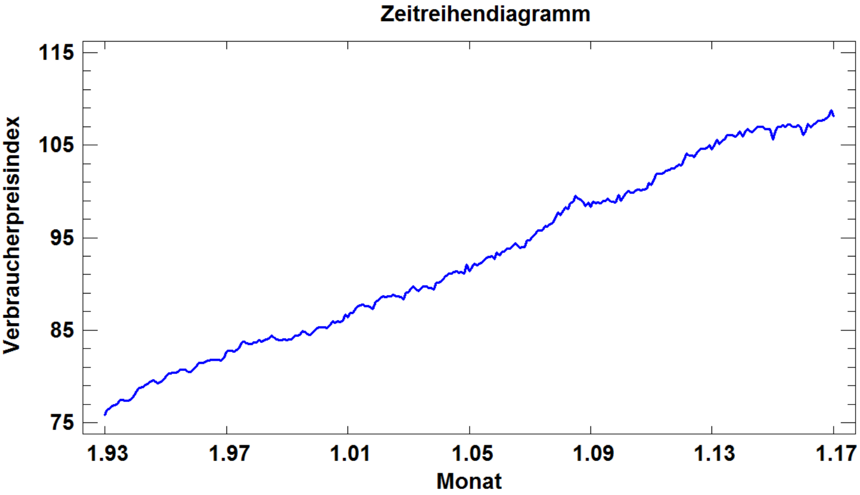
a) Preisindizes

- **Untersuchungsgegenstand**: Preisentwicklung eines Warenkorbs bestehend aus n Gütern (repräsentativer Warenkorb).
- $\mathbf{p}_{t_0} = (p_{t_0}(1), p_{t_0}(2), \ldots, p_{t_0}(n))$: Preise der Güter zur Basiszeit t_0 .
- $\mathbf{p}_t = (p_t(1), p_t(2), \ldots, p_t(n))$: Preise der Güter zur Berichtszeit t .
- $\mathbf{q} = (q(1), q(2), \ldots, q(n))$: verbrauchte Mengen der Güter.

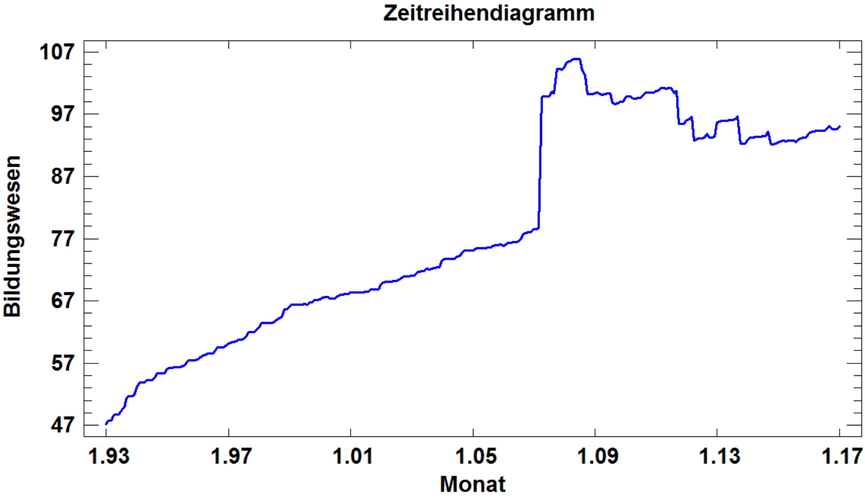
Statistisches Bundesamt

- Startseite:
  Statistisches Bundesamt
- Der folgende Film zur Inflationsrate und zum Verbraucherpreisindex stammt vom Statistischen Bundesamt:
  Film zum Verbrauchspreisindex
- Die aktuelle Zusammensetzung des Warenkorbes und die Preisveränderungen der einzelnen Bereiche werden im Preis-Kaleidoskop schön veranschaulicht:
  Preis-Kaleidoskop
- Auch die Daten für die Indexreihen (Monatsdaten von Januar 1993 (1.93) bis Januar 2017 (1.17)) auf den folgenden 3 Folien stammen vom Statistischen Bundesamt.

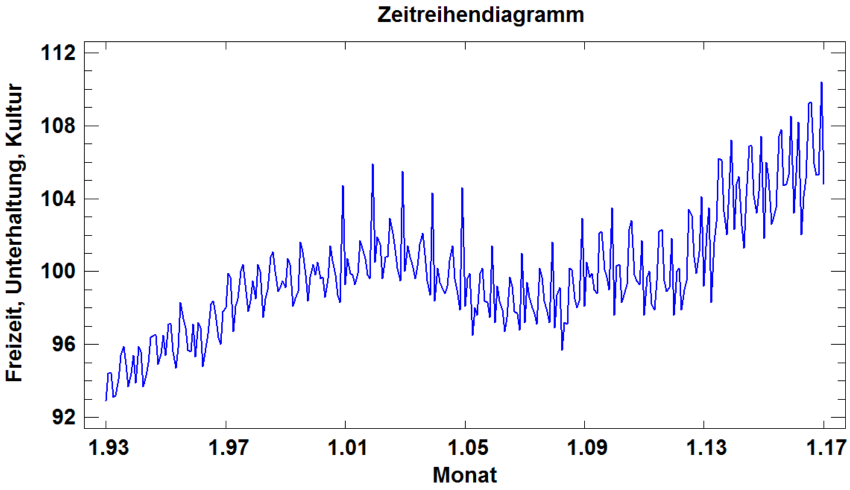
Verbraucherpreisindex insgesamt



Verbraucherpreisindex im Bildungswesen



Gruppe: Freizeit, Unterhaltung und Kultur



Grundidee zur Berechnung eines Preisindex

- $P_{t_0,t} = \dfrac{\text{Wert des Warenkorbs zum ZP } t}{\text{Wert des Warenkorbs zum ZP } t_0} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} q(i)p_t(i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} q(j)p_{t_0}(j)}$.
- Kann als gewichtete Summe der einfachen Preisindizes $I_{t_0,t}(i) = \dfrac{p_t(i)}{p_{t_0}(i)}$ für die Einzelgüter ausgedrückt werden:

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} q(i)p_t(i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} q(j)p_{t_0}(j)} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} q(i)p_{t_0}(i)\frac{p_t(i)}{p_{t_0}(i)}}{\sum\limits_{j=1}^{n} q(j)p_{t_0}(j)} = \sum_{i=1}^{n} w(i) I_{t_0,t}(i)$$

mit $w(i) = \frac{q(i)p_{t_0}(i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} q(j)p_{t_0}(j)}$ (Anteil des Umsatzes von Gut i am Gesamtumsatz zur Basiszeit t_0).

Änderungen des repräsentativen Warenkorbs

- Preisänderungen führen zu Nachfrageverschiebungen.

⇒ Der repräsentative Warenkorb verändert sich mit der Zeit.

- Man kann zur Berechnung des Preisindex $P_{t_0,t}$ sowohl den repräsentativen Warenkorb zur Basiszeit t_0 als auch den Warenkorb zur Berichtszeit t verwenden.

Preisindex nach Laspeyres bzw. Paasche

Preisindex nach Laspeyres

- Berechnung mit repräsentativem Warenkorb zum Basiszeitpunkt t_0.
- $$P^L_{t_0,t} = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_{t_0}(i) p_t(i)}{\sum_{j=1}^{n} q_{t_0}(j) p_{t_0}(j)} = \sum_{i=1}^{n} w(i) I_{t_0,t}(i) \quad \text{mit} \quad w(i) = \frac{q_{t_0}(i) p_{t_0}(i)}{\sum_{j=1}^{n} q_{t_0}(j) p_{t_0}(j)}.$$

Preisindex nach Paasche

- Berechnung mit repr. Warenkorb zum Berichtszeitpunkt t.
- $$P^P_{t_0,t} = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_t(i) p_t(i)}{\sum_{j=1}^{n} q_t(j) p_{t_0}(j)} = \sum_{i=1}^{n} w_t(i) I_{t_0,t}(i) \quad \text{mit} \quad w_t(i) = \frac{q_t(i) p_{t_0}(i)}{\sum_{j=1}^{n} q_t(j) p_{t_0}(j)}.$$
- Darstellbar auch als gewogenes harmonisches Mittel mit auf t bezogenen Preisfaktoren in den Gewichten.

b) Mengenindizes

Grundidee: Preise festhalten und Mengen variieren.

Mengenindex nach Laspeyres

- Berechnung mit Preisen zum Basiszeitpunkt t_0.
- $$Q^L_{t_0,t} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_{t_0}(i) q_t(i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} p_{t_0}(j) q_{t_0}(j)} = \sum_{i=1}^{n} w(i) \frac{q_t(i)}{q_{t_0}(i)} \quad \text{mit} \quad w(i) = \frac{p_{t_0}(i) q_{t_0}(i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} p_{t_0}(j) q_{t_0}(j)} .$$

Mengenindex nach Paasche

- Berechnung mit Preisen zum Berichtszeitpunkt t.
- $$Q^P_{t_0,t} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_t(i) q_t(i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} p_t(j) q_{t_0}(j)} = \sum_{i=1}^{n} w_t(i) \frac{q_t(i)}{q_{t_0}(i)} \quad \text{mit} \quad w_t(i) = \frac{p_t(i) q_{t_0}(i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} p_t(j) q_{t_0}(j)} .$$

c) Umsatzindex

$$U_{t_0,t} = \frac{\text{Gesamtumsatz zum ZP } t}{\text{Gesamtumsatz zum ZP } t_0} = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_t(i)p_t(i)}{\sum_{j=1}^{n} q_{t_0}(j)p_{t_0}(j)}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} q_t(i)p_t(i)}{\sum_{j=1}^{n} q_{t_0}(j)p_{t_0}(j)} \frac{\sum_{i=1}^{n} q_{t_0}(i)p_t(i)}{\sum_{j=1}^{n} q_{t_0}(j)p_t(j)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_t(i)p_t(i)}{\sum_{j=1}^{n} q_{t_0}(j)p_t(j)} \frac{\sum_{i=1}^{n} q_{t_0}(i)p_t(i)}{\sum_{j=1}^{n} q_{t_0}(j)p_{t_0}(j)}$$

$$= Q^P_{t_0,t} \cdot P^L_{t_0,t} \qquad \text{bzw.}$$

$$U_{t_0,t} = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_t(i)p_t(i)}{\sum_{j=1}^{n} q_{t_0}(j)p_{t_0}(j)} \frac{\sum_{i=1}^{n} q_t(i)p_{t_0}(i)}{\sum_{j=1}^{n} q_t(j)p_{t_0}(j)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_t(i)p_t(i)}{\sum_{j=1}^{n} q_t(j)p_{t_0}(j)} \frac{\sum_{i=1}^{n} q_t(i)p_{t_0}(i)}{\sum_{j=1}^{n} q_{t_0}(j)p_{t_0}(j)}$$

$$= P^P_{t_0,t} \cdot Q^L_{t_0,t} \,.$$

Beispiel 2.10

	Warenart i					
	1		2		3	
Periode t	$p_t(1)$	$q_t(1)$	$p_t(2)$	$q_t(2)$	$p_t(3)$	$q_t(3)$
1	5	4	2	4	4	3
2	10	7	8	5	5	5
3	12	8	9	6	7	6

Umbasieren und Verketten bei zusammengesetzten Indexzahlen

- Bei zusammengesetzten Indexzahlen gilt im Allgemeinen nicht wie bei einfachen Indexzahlen die Verkettungseigenschaft

$$I_{t_0',t} = \frac{I_{t_0,t}}{I_{t_0,t_0'}} \qquad \text{bzw.} \qquad I_{t_0,t} = I_{t_0,t_0'} \cdot I_{t_0',t} \,.$$

$\Rightarrow$ Man kann zusammengesetzte Indexzahlen nicht einfach so umbasieren.

- Der Preisindex nach Fisher $\quad P^F_{t_0,t} := \sqrt{P^L_{t_0,t} \cdot P^P_{t_0,t}} \quad$ besitzt aber die Verkettungseigenschaft.

Verkettung von Laspeyres-Indizes

- Möglichkeit zur gelegentlichen Anpassung der Gewichte.
- Verkettungszeitpunkte $t_1, t_2, \ldots$.
- Für $t_k < t \leq t_{k+1}$ setzt man $I_t = P^L_{t_k,t} \cdot c(t_k)$.
- Der Verkettungsfaktor wird so gewählt, dass kein Sprung zum Verkettungszeitpunkt t_k auftritt.
- $c(t_k) = P^L_{t_k,t_k} \cdot c(t_k) = I^{neu}_{t_k} \stackrel{!}{=} I^{alt}_{t_k} = P^L_{t_{k-1},t_k} \cdot c(t_{k-1})$
- Rekursive Berechnung, Startwert $c(t_0) = 1$.
- **Beispiel**

	t_0			t_1			t_2	
$P^L_{t_0,t}$	1	1,5	1,8	2				
$P^L_{t_1,t}$				1	1,1	1,2	1,25	
$P^L_{t_2,t}$							1	1,4
I_t	1	1,5	1,8	2	2,2	2,4	2,5	3,5

Einige wichtige Indizes aus dem Bereich der Wirtschaft

- Verbraucherpreisindex.
- Index der Einzelhandelspreise.
- Index der Großhandelsverkaufspreise.
- Nominallohn- und Reallohnindizes.
- Deutscher Aktienindex (DAX).
  - Entsteht durch eine am verketteten Laspeyres-Index orientierten Gewichtung von 30 deutschen Aktien.
  - $t_0 \triangleq 31.12.1987$, Verkettungstermine t_k im Vierteljahresrhythmus.
  - Berechnungsformel: $\mathrm{DAX_t} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{30} q_{t_k}(i) p_t(i) c_t(i)}{\sum\limits_{i=1}^{30} q_{t_0}(i) p_{t_0}(i)} \cdot K(t_k) \cdot 1000\,.$
  - $q_t(i)$: Grundkapital von Gesellschaft i zum Zeitpunkt t.
  - $c_t(i)$: Korrekturfaktor zur Bereinigung marktfremder Einflüsse, wie Dividendenzahlungen oder Kapitalmaßnahmen von Gesellschaft i.
  - $K(t_k)$ - Verkettungsfaktor.