Statistik I für Betriebswirte
Vorlesung 4

Dr. Andreas Wünsche

TU Bergakademie Freiberg
Institut für Stochastik

29. April 2019

1.6 Wichtige diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

1.6.1 Binomialverteilung

- **Parameter:** $n \in \mathbb{N}, \ 0 \leq p \leq 1$.
- Zufallsgröße X mit möglichen Werten $x_0 = 0, x_1 = 1, \ldots, x_n = n$.
- **Wahrscheinlichkeitsfunktion:**

$$p_k = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

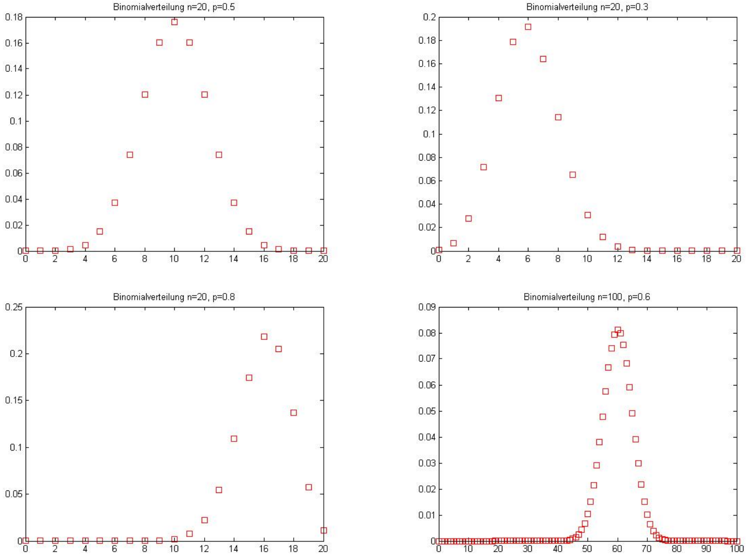
- **Anwendung in folgender Situation:**
  - zufälliges Experiment mit 2 Versuchsausgängen (A, und $\overline{A}$) wird n-mal wiederholt;
  - Eintreten des Ereignisses A in den einzelnen Versuchen sei unabhängig;
  - in jedem Versuch sei die Erfolgswahrscheinlichkeit gleich p, d.h. $p = P(A)$;
  - Zufallsgröße X ist gleich der Anzahl des Eintretens des Ereignisses A.

Binomialverteilung II

- **Typische Anwendungen:**
  - Stichprobennahme mit Zurücklegen z.B. bei Qualitätskontrolle;
  - Schadenzahlverteilung in der Versicherungsmathematik.
- **Bezeichnung:** $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$.
- **Kenngrößen:** $\mathbf{E}X = np$ und $\mathbf{Var}X = np(1 - p)$.
- **Spezialfall:** Bernoulli-Verteilung: $n = 1$
  $X \sim \mathrm{B}(p) = \mathrm{Bin}(1, p) \implies \mathbf{E}X = p$ und $\mathbf{Var}X = p(1 - p)$.
- **Eigenschaft:** $X_1 \sim \mathrm{Bin}(n_1, p)$, $X_2 \sim \mathrm{Bin}(n_2, p)$ unabhängig

  $\Rightarrow \quad X_1 + X_2 \sim \mathrm{Bin}(n_1 + n_2, p)$.

Binomialverteilung III



Übungsbeispiel 1.7: Binomialverteilung

- Ein idealer Würfel wird 20-mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zweimal eine Sechs geworfen wird ?
- Zufallsgröße $X \dots$ „Anzahl der geworfenen Sechsen bei 20 Würfen dieses Würfels“ $\quad \Rightarrow \quad X$ ist binomialverteilt.
- 20-malige Wiederholung des Einzelversuchs „Werfen eines Würfels“ $\quad \Rightarrow \quad n = 20\,.$
- Erfolg $E \dots$ „Im Einzelwurf fällt eine Sechs“.
- Wahrscheinlichkeit für das Werfen einer Sechs bei einem Würfelwurf beträgt $1/6 \quad \Rightarrow \quad p = P(E) = 1/6\,.$
- **Gesucht** ist $P(X \geq 2)\,.$

1.6.2 Negative Binomialverteilung

- **Parameter:** $r \in \mathbb{N}\,,\ 0 \le p \le 1\,.$
- Mögliche Werte der Zufallsgröße $X:\ k = r, r+1, r+2, \ldots\ .$
- **Wahrscheinlichkeitsfunktion:**

$$p_k = P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}\,, \quad k = r, r+1, \ldots\,.$$

- **Anwendung in folgender Situation:**
  - zufälliges Experiment mit 2 Versuchsausgängen (A, und $\overline{A}$) wird solange wiederholt bis das Ereignis A genau r-mal eingetreten ist;
  - Eintreten des Ereignisses A in den einzelnen Versuchen sei unabhängig;
  - in jedem Versuch sei die Erfolgswahrscheinlichkeit gleich p, d.h. $p = P(A)$;
  - Zufallsgröße X ist gleich der Anzahl der durchgeführten Teilversuche (bis das Ereignis A genau r-mal eingetreten ist).

Negative Binomialverteilung II

- **Bezeichnung:** $X \sim \mathrm{NegBin}(r, p)$.
- **Kenngrößen:** $\mathbf{E}X = \frac{r}{p}$ und $\mathbf{Var}X = \frac{r(1-p)}{p^2}$.
- **Spezialfall:** Geometrische Verteilung: $r = 1$
  $X \sim \mathrm{Geo}(p) = \mathrm{NegBin}(1, p)$.
- **Eigenschaft:**
  $X_1 \sim \mathrm{NegBin}(r_1, p)$, $X_2 \sim \mathrm{NegBin}(r_2, p)$ unabhängig
  $\Rightarrow \quad X_1 + X_2 \sim \mathrm{NegBin}(r_1 + r_2, p)$.
- **Alternative Definition:** (vgl. Anwendung in folgender Situation)
  Die Zufallsgröße Y ist gleich der Anzahl der Versuchsausgänge $\overline{A}$.
  Also ist $Y = X - r$ und damit

$$P(Y = k) = P(X = k + r), \quad k = 0, 1, \ldots .$$

1.6.3. Geometrische Verteilung

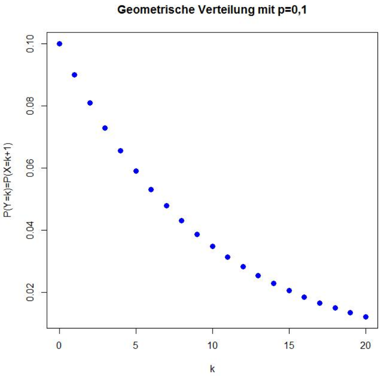
- **Parameter:** $0 < p < 1$.
- Zufallsgröße X mit möglichen Werten $k = 1, 2, 3, \ldots$.
- **Wahrscheinlichkeitsfunktion:**

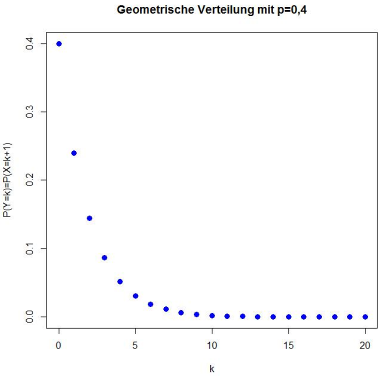
$$p_k = P(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots .$$

- **Bezeichnung:** $X \sim \mathrm{Geo}(p)$.
- **Kenngrößen:** $\mathbf{E}X = \frac{1}{p}$ und $\mathbf{Var}X = \frac{1-p}{p^2}$.
- **Anwendung in folgender Situation:**
  - Gleichartige unabhängige Teilversuche, bei denen jeweils „Erfolg“ mit Wahrscheinlichkeit p oder „Misserfolg“ mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ eintreten kann, werden so lange durchgeführt, bis zum ersten Mal „Erfolg“ eingetreten ist.
  - Die Zufallsgröße X ist gleich der Anzahl der durchgeführten Teilversuche.

Geometrische Verteilung II

- **Bemerkung:** Manchmal wird nur die Anzahl Y der „Misserfolge“ vor dem ersten „Erfolg“ gezählt. Diese Zufallsgröße hat als mögliche Werte $0, 1, \ldots$, es gilt $Y = X - 1$.





Übungsbeispiel 1.8: Geometrische Verteilung

Die täglichen Kursänderungen einer Aktie seien unabhängig und die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Kurs an einem Tag wächst oder höchstens um 5% fällt, betrage 0.8. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dies erstmalig am zweiten oder dritten Tag passiert?

1.6.4 Hypergeometrische Verteilung

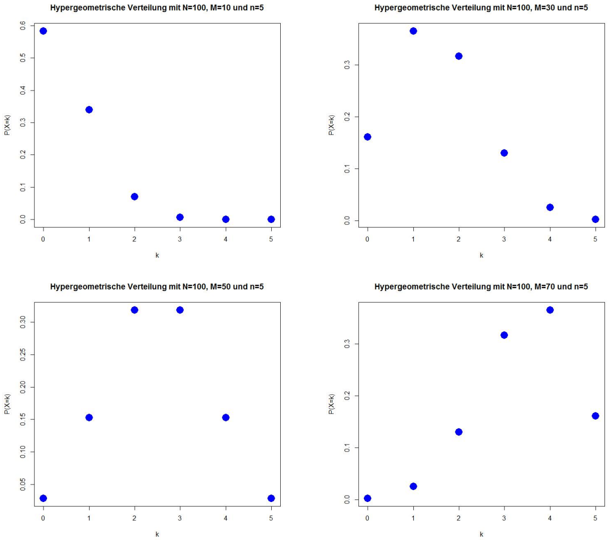
- **Parameter:** $N, M, n \in \mathbb{N}, \quad M \leq N,\ n \leq N$.
- Zufallsgröße X mit möglichen Werten $x_0 = 0, x_1 = 1, \ldots, x_n = n$.
- **Wahrscheinlichkeitsfunktion:**

$$p_k = P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad \text{falls } n - (N - M) \leq k \leq M,$$

$$p_k = P(X = k) = 0, \qquad \text{sonst.}$$

- **Anwendung in folgender Situation:**
  - unter N Dingen befinden sich M ausgezeichnete;
  - von den N Dingen werden n zufällig ausgewählt (ohne Zurücklegen);
  - Zufallsgröße X repräsentiert die Anzahl der ausgezeichneten Dinge unter den n ausgewählten.

Hypergeometrische Verteilung II

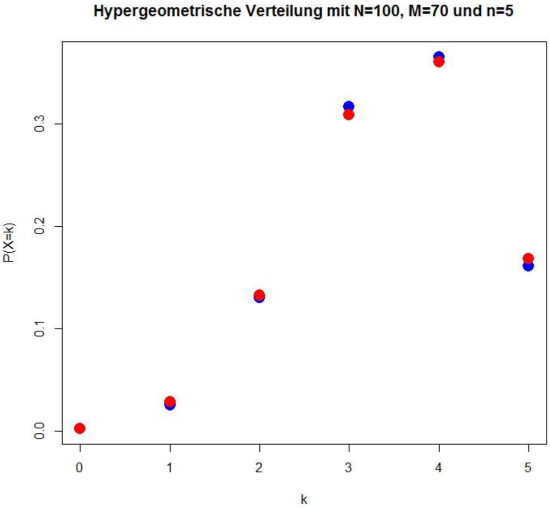


Hypergeometrische Verteilung III

- **Typische Anwendung:** Stichprobennahme ohne Zurücklegen, z.B. bei der Qualitätskontrolle.
- **Bezeichnung:** $X \sim \mathrm{Hyp}(N, M, n)$.
- **Kenngrößen:**
$$\mathbf{E}X = n \cdot \frac{M}{N},$$
$$\mathbf{Var}X = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \frac{N-M}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1}.$$
- Für großes N ($N \geq 60$) und M und im Vergleich dazu kleines n ($n/N < 0.1$) kann die hypergeometrische Verteilung durch die Binomialverteilung ($p = M/N$) approximiert werden:
$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \approx \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Beispiel für Binomial-Approximation

$X \sim \mathrm{Hyp}(100, 70, 5)$ wird approximiert durch $Y \sim \mathrm{Bin}(5, 0.7)$.



Übungsbeispiel 1.9: Hypergeometrische Verteilung

- Ein Kunde übernimmt alle 50 gelieferten Schaltkreise, wenn in einer Stichprobe von 10 Schaltkreisen höchstens ein nicht voll funktionsfähiger Schaltkreis enthalten ist. Ansonsten wird die gesamte Lieferung verworfen.
- Man berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die 50 Schaltkreise
  a) abgenommen werden, obwohl diese 12 nicht voll funktionsfähige Schaltkreise enthalten;
  b) zurückgewiesen werden, obwohl nur 3 nicht voll funktionsfähige Schaltkreise enthalten sind !
- Zufallsgröße X ... „Anzahl der nicht voll funktionsfähigen Schaltkreise in der Stichprobe".
- Die Zufallsgröße X ist hypergeometrisch verteilt.
- $N = 50\,,\ n = 10\,,\ M = 12$ bzw. $M = 3\,.$
- **Gesucht:** **a)** $P(X \leq 1)\,;$ **b)** $P(X > 1)\,.$

1.6.5 Poissonverteilung

- **Parameter:** $\lambda > 0$ (die „Intensität“ der Poissonverteilung).
- Zufallsgröße X mit möglichen Werten $k = 0, 1, 2, \ldots$.
- **Wahrscheinlichkeitsfunktion:**

$$p_k = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

- **Bezeichnung:** $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$.
- **Kenngrößen:** $\mathbf{E}X = \lambda$ und $\mathbf{Var}X = \lambda$.
- **Eigenschaft:** $X_1 \sim \mathrm{Poi}(\lambda_1)$, $X_2 \sim \mathrm{Poi}(\lambda_2)$ unabhängig

  $\Rightarrow \quad X_1 + X_2 \sim \mathrm{Poi}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Poissonverteilung II

- **Typische Anwendungen:** Poissonverteilung ist typische Verteilung für Anzahl von Ereignissen in gewissem Zeitraum, wenn für beliebige hinreichend kleine Teilintervalle der Länge h gilt:
  - In jedem Teilintervall der Länge h tritt höchstens ein Ereignis ein.
  - Die Wahrscheinlichkeit, ein Ereignis im Teilintervall der Länge h zu finden, hängt nur von der Länge des betrachteten Zeitintervalls ab und ist proportional zu dieser.
  - Das Eintreten eines Ereignisses im Teilintervall wird nicht beeinflusst von Ereignissen, die in der Vorgeschichte stattgefunden haben (Nachwirkungsfreiheit).
- Parameter λ entspricht dann der durchschnittlichen Anzahl der Ereignisse im betrachteten Zeitraum.
- **Beispiele:** Anzahl von Telefonanrufen, Anzahl von emittierten Teilchen in Physik (radioaktiver Zerfall), Anzahl von Unfällen, Anzahl von Schadensfällen.

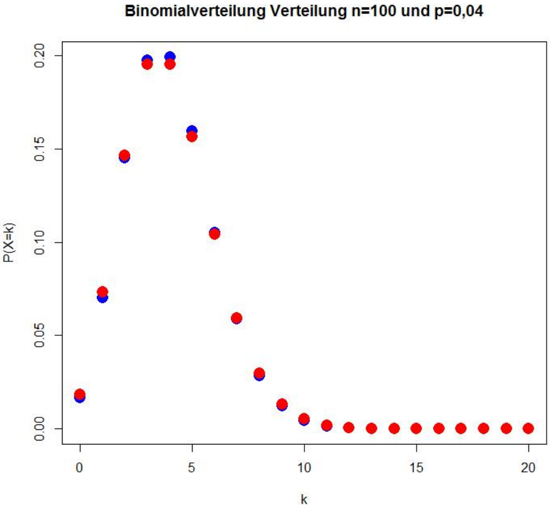
Poissonverteilung und Binomialverteilung

- Es gilt $\quad \mathrm{Bin}(n, \lambda/n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{Poi}(\lambda)\,.$
- Für großes n ($n \geq 30$) und kleines p ($p \leq 0.05$, sogenannte „seltene Ereignisse") lassen sich Wahrscheinlichkeiten einer Binomialverteilung näherungsweise mit Hilfe einer Poissonverteilung mit Parameter $\lambda = np$ berechnen, d.h.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \approx \quad \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}\,.$$

Beispiel für Poisson-Approximation

$X \sim \mathrm{Bin}(100, 0.04)$ wird approximiert durch $Y \sim \mathrm{Poi}(4)$.



Übungsbeispiel 1.10: Poissonverteilung

- Die zufällige Anzahl X der Schadensfälle bei einer Versicherungsagentur sei für Zeitintervalle einer bestimmten Länge poissonverteilt mit Parameter $\lambda = 3$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einem Zeitintervall dieser Länge mindestens zwei Schadensfälle eintreten?
- Es werden 50 Erzeugnisse aus einer Lieferung mit einer Ausschusswahrscheinlichkeit von 0.01 untersucht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich höchstens ein fehlerhaftes Erzeugnis unter den 50 Erzeugnissen befindet?

1.6.6 Diskrete Gleichverteilung

- **Situation:** Eine Menge $\mathcal{M}$ besteht aus n Elementen, die bei einer Auswahl aus dieser Menge alle gleichwahrscheinlich ausgewählt werden.
- **Wahrscheinlichkeitsfunktion:**

$$p_k = P(X = k) = \frac{1}{n} \quad \text{für alle } k \in \mathcal{M}.$$

- **Bezeichnung:** $X \sim \mathrm{U}(\mathcal{M})$.
- **Kenngrößen:** für diskrete Gleichverteilung auf $1, 2, \ldots, n$.
  $X \sim \mathrm{U}(\{1, 2, \ldots, n\})$: $\quad \mathbf{E}X = \frac{n+1}{2}$ und $\mathbf{Var}X = \frac{n^2-1}{12}$.
- **Typische Anwendungen:**
  - Laplace-Experiment,
  - Würfeln mit einem gerechten Würfel.